

# Prolongement et mensualisation de la table de maintien en invalidité

LÉONIE LE BASTARD, HOUDA BENABDERRAHMAN,  
CHANTAL MALIKA TRAORÉ, KOROTOUMOU TRAORÉ

May 6, 2018

## 1 Introduction : Objectif de l'outil

L'âge légal de départ à la retraite est actuellement de 62 ans. Suite à un accident de travail ou une maladie professionnelle, une personne est déclarée comme invalide à partir du moment où elle "présente une invalidité réduisant de deux tiers ou plus sa capacité de travail ou de gain, c'est à dire le mettant hors d'état de se procurer, dans une profession quelconque, un salaire supérieur à une fraction de la rémunération normale perçue dans la même région par des travailleurs de la même catégorie, dans la profession qu'il exerçait avant la date de l'interruption de travail". La sécurité sociale verse alors une rente mensuelle à l'assurée afin de maintenir son niveau de vie. Cette rente dépend de son salaire annuel tranche A correspondant à la moyenne des 10 meilleurs salaires revalorisés. La sécurité sociale verse alors cette rente jusque 62 ans. Passé cet âge, c'est le régime des retraites qui versera une rente à l'assuré. Les assurances ne s'intéressent donc aux probabilités de maintien en invalidité que jusque l'âge de 62 ans. Les assurances ne s'intéressent donc aux probabilités de maintien en invalidité que jusque l'âge de 62 ans. La table de BCAC 2010 n'a donc été construite que jusque cet âge, tandis que la version de 2013 considère un âge de départ à la retraite de 65 ans.

L'objectif est donc ici de prolonger ces tables de maintien en invalidité jusqu'à l'âge souhaité. Pour chaque âge d'entrée en invalidité, il faut donc calculer les effectifs de personnes toujours invalides pour des anciennetés supérieures à celles déjà fournies.

## 2 Comment sont structurées ces tables ?

Pour chaque âge d'entrée en invalidité, on considère 10 000 individus au temps 0. On regarde alors l'évolution du nombre d'invalides avec le temps. Les colonnes correspondent à l'ancienneté et on considère une ligne par âge d'entrée en invalidité.

Notons que l'ancienneté varie de 0 à  $anc_{max}$ , où  $anc_{max}$  est une constante telle que  $anc_{max} = age_{retraite} - age_{entree}$

Cet outil vous permet de prolonger une table de maintien en invalidité jusqu'à un âge rentré en paramètre.

## 3 Paramètres à fixer

- Choisissez un âge de départ à la retraite. Il s'agit de l'âge jusque lequel les effectifs de population seront calculés.
- Choisissez une table d'invalidité à prolonger parmi les tables BCAC2010 et BCAC2013 ou entrez votre propre table grâce au bouton "Browse"

Age/Années	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696
21	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696
22	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696
23	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696
24	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696
25	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696
26	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696
27	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696
28	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696
29	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696
30	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696
31	10 000	9 868	9 731	9 538	9 364	9 174	9 013	8 913	8 815	8 756
32	10 000	9 843	9 698	9 537	9 306	9 120	8 985	8 846	8 771	8 685

Figure 1: Structure de la table de maintien en invalidité du BCAC

Figure 2: Paramètres à fixer pour le prolongement de la table de maintien en invalidité

- Choisissez une table de mortalité parmi celles proposées (TD88-90,TV88-90, TH0002 ou bien TF0002), ou entrez votre propre table qui servira pour calculer le prolongement de la table précédente. Cette dernière doit avoir le même format que la table de mortalité de la figure 3 suivante :

La première colonne contient les âges et la seconde les effectifs.

- Enfin, le slider vous permet d'appliquer un coefficient de majoration aux probabilités de décès de la table de mortalité sélectionnée

Par défaut, la table d'invalidité considérée est celle du BCAC 2010 et la table de mortalité est la table TD88-90 correspondant à la table de mortalité de la population masculine française sur la période 1998 - 1990. Cette dernière table est celle ayant été sélectionnée par l'Institut des Actuaire pour le prolongement de la table de maintien en invalidité.

Une fois le prolongement terminé, vous avez la possibilité de télécharger la nouvelle table de maintien en invalidité au format (.csv).

0	100000
1	99129
2	99057
3	99010
4	98977
5	98948
6	98921
7	98897
8	98876
9	98855
10	98835
11	98814
12	98793
13	98771
14	98745
15	98712
16	98667
17	98606
18	98520
19	98406
20	98277
21	98137
22	97987
23	97830
24	97677
25	97524
26	97373

Figure 3: Extrait de la table de mortalité TD88-90

## 4 Résultats

### 4.1 Prolongement de la table d'invalidité

Comment est effectué le prolongement de la table de maintien en invalidité ?

La durée de vie restante d'un individu d'âge  $x$  peut être modélisée par une variable aléatoire positive que l'on note  $T_x$ . On définit alors la fonction de survie comme la probabilité qu'un individu d'âge  $x$  survive au minimum jusqu'à un instant  $t + x$ . On note cette fonction  $S_x(t)$ . On a alors :

$$S_x(t) = \mathbb{P}(T_x \geq t) \quad (1)$$

$S_x(t)$  est donc la probabilité qu'un individu d'âge  $x$  survive au moins jusque l'âge  $x + t$ .

Ici nous travaillons avec des temps  $t$  entiers représentant des années. Pour calculer les valeurs de la fonction de survie, une table de mortalité suffit. En effet, considérons un individu d'âge  $x$ . Sa probabilité d'être encore en vie à l'âge  $t + x \geq x$  peut être approximée en utilisant les effectifs donnés par la table d'invalidité. Notons  $N_t$  le nombre de survivants à l'âge  $t$ . La probabilité de survivre jusque l'âge  $t$  sachant qu'on a l'âge  $x$  est alors :

$$\mathbb{P}(T_x \geq t) \simeq \frac{N_{t+x}}{N_x} \quad (2)$$

représentant la proportion d'individus ayant survécu entre l'âge  $x$  et l'âge  $t + x$ .

La seconde étape du calcul du prolongement consiste à utiliser ces probabilités conjointement avec la dernière valeur présente de chaque ligne de la table d'invalidité. Afin de connaître le nombre d'invalides à l'âge  $t \geq 62$ , il suffit de multiplier l'effectif de survivants à 62 ans par la probabilité de survivre entre 62 ans et  $t$ . En effet, le nombre d'individus survivant à l'âge  $62 + t$  noté  $N_{62+t}$  sachant  $N_{62}$  est supposé suivre une loi binomiale de paramètre  $(N_{62+t}, S_{62}(t))$ .

âge	62 ans	63 ans	64 ans	65 ans
Nombre de survivants	79 243	77 807	76 295	74 720
Probabilités de survie	1	0,9819	0,9628	0,9429

Figure 4: Valeurs de la fonction  $S_{62}(t)$

âge	63 ans	64 ans	65 ans
Nombre d'invalides	$0,9819 \times L_{40,22}^{inv}$	$0,9628 \times L_{40,22}^{inv}$	$0,9429 \times L_{40,22}^{inv}$
Probabilités de survie	6 384,2	6 260,1	6 130,9

Figure 5: Exemple de prolongement de la table d'invalidité du BCAC pour un âge d'entrée en invalidité de 40 ans

Pour rappel, l'espérance d'une variable aléatoire  $X$  de loi binomiale de paramètre  $(n, p)$  est donnée par :

$$\mathbb{E}[X] = n \times p \quad (3)$$

Si l'on note  $L_{x,anc}^{inv}$  le nombre d'individus entrés en invalidité à l'âge  $x$ , et invalides depuis  $anc$  années, avec un âge actuel :  $age_{actuel} = anc + x \geq 62ans$ , alors :

$$L_{x,anc_{max}+t}^{inv} = \mathbb{P}(T_{62} \geq t) \times L_{x,anc_{max}}^{inv} \quad (4)$$

où  $anc_{max}$  représente l'ancienneté maximale de la table d'invalidité originale qui dépend de l'âge d'entrée  $x$ .

$$anc_{max} = age_{retraite} - x \quad (5)$$

## 4.2 Mensualisation de la table d'invalidité

Cette étape consiste à mensualiser la table de maintien en invalidité du BCAC. Cela revient à calculer pour chaque âge d'entrée  $x$  en invalidité et pour chaque ancienneté mensuelle  $anc_m$  le nombre d'invalides  $l_{x,anc_m}^{inv}$ . Ce calcul est basé sur les méthodes d'interpolation linéaire. L'objectif est donc de passer d'une table de maintien en invalidité de la forme 6 à une table de la forme 7.

Cette mensualisation se base sur la table prolongée à l'étape précédente. Aucun paramètre supplémentaire n'est donc requis pour cette étape du calcul.

	ancienneté	$anc_{inf}$	$anc_{sup}$
âge d'entrée			
$x$		$L_{x,anc_{inf}}^{inv}$	$L_{x,anc_{sup}}^{inv}$

Figure 6: Extrait de table de maintien en invalidité avec anciennetés annuelles

Notons  $l_{x,anc_m}^{inv}$  le nombre d'invalides dans la table mensualisée pour un âge d'entrée  $x$  et une ancienneté mensuelle  $anc_m$

ancienneté	$anc_{inf} + 0$ mois	$anc_{inf} + 1$ mois	...	$anc_{inf} + 11$ mois	$anc_{sup} + 0$ mois
âge d'entrée					
$x$	$l_{x,12 \times anc_{inf}}^{inv} = L_{x,anc_{inf}}^{inv}$	$l_{x,12 \times anc_{inf}+1}^{inv}$	...	$l_{x,12 \times anc_{inf}+11}^{inv}$	$l_{x,12 \times anc_{sup}}^{inv} = L_{x,anc_{sup}}^{inv}$

Figure 7: Extrait de table de maintien en invalidité avec anciennetés mensuelles

### Explication de la méthode d'interpolation

Le calcul du nombre d'invalides pour une ancienneté mensuelle sera une proportion du nombre d'invalides avec l'ancienneté annuelle inférieure et du nombre d'invalides d'ancienneté annuelle supérieure. Notons  $i$  le nombre de mois d'ancienneté supplémentaires par rapport à l'ancienneté annuelle inférieure. Par exemple, si l'on souhaite calculer le nombre d'invalides pour un âge  $x$  et d'ancienneté 6 ans et 3 mois,  $i$  sera égal à 3.

On a alors la formule d'interpolation suivante :

$$l_{x,12 \times anc_{inf}+i}^{inv} = L_{x,anc_{inf}}^{inv} + \frac{i}{12} \times (L_{x,anc_{sup}}^{inv} - L_{x,anc_{inf}}^{inv}) \quad (6)$$

L'onglet "Mensualisation" de l'application R-Shiny permet de prolonger puis mensualiser une table de maintien en invalidité, pour tous les âges d'entrée.