Cours 10. Quadri-vecteurs importants

— Résumé du dernier cours sur le quadri-vecteur énergie-impulsion
— L'énergie totale relativiste
— Le photon
— Exercices pour la maison.

Résumé du cours 9

(j'ai changé notation de $\vec{F}$ à $\vec{f}$ pour etre consistent ; la force $\vec{f}$ est un vecteur habituel)

Les grandes lignes :

— Nous voulons exprimer la relativité restreinte en quadri-vecteurs, les vecteurs $\vec{A}$ qui sont invariants par une transformation de Lorentz. Puis les vecteurs restent le même en tout référentiels inertiels. Mais les 4 composantes de $\vec{A}$, il s'agit de (A_0, A_1, A_2, A_3), change avec référentiel.

— *La quadri-vitesse* (il s'appelle aussi *le quadri-vecteur vitesse*) d'une particule massive est le vecteur tangent à la ligne d'univers paramétrée par τ, le temps propre mesuré le long de la ligne d'univers :

$$\vec{U} = \left(\frac{d\,ct(\tau)}{d\tau}, \frac{d\,x(\tau)}{d\tau}, \frac{d\,y(\tau)}{d\tau}, \frac{d\,z(\tau)}{d\tau} \right),$$
$$= \gamma \left(\frac{d\,ct}{dt}, \frac{d\,x}{dt}, \frac{d\,y}{dt}, \frac{d\,z}{dt} \right) = \gamma\,(c, \vec{v})\,. \qquad (1)$$

Le facteur γ est ce qui intervient dans la transformation de Lorentz qui permet passer du repère R au repère propre de la particule. Il ne dépend que de la vitesse de la particule dans le repère R,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad v^2 = \|\vec{v}\|^2 = \left(\frac{d\,x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\,y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\,z}{dt}\right)^2.$$

— Bien entendu la norme d'un quadri-vecteur est invariante par une transformation de Lorentz. Ici

$$\begin{aligned}
\|\vec{U}\|^2 &= \vec{U}\cdot\vec{U}, \\
&= \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} U_\mu U_\nu, \\
&= \begin{pmatrix} U_0 & U_1 & U_2 & U_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}, \\
&= U_0^2 - U_1^2 - U_2^2 - U_3^2 = \gamma^2(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \gamma^2(c^2 - v^2), \\
&= c^2\gamma^2(1-\beta^2) = c^2. \qquad (2)
\end{aligned}$$

— *Le quadri-vecteur énergie-impulsion* est simplement

$$\vec{P} = m\vec{U}, \qquad (3)$$

avec composantes dans repère R :

$$\vec{P} = m\vec{U} = m\gamma(c, v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), \tag{4}$$

et donc ici $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ est la généralisation relativiste du vecteur habituel de l'impulsion. Disons $p = \|\vec{p}\|$. De plus, on a trouvé, suivant l'argument d'Einstein, que l'énergie totale relativiste E est :

$$E = \gamma mc^2. \tag{5}$$

Dans le reprère propre de la particule ($v = 0$ par définition) on obtient $\gamma = 1$ et $E_0 = mc^2$.

— La norme au carrée de la quadri-vecteur énergie-impulsion est m^2c^2,

$$\vec{P} \cdot \vec{P} = m^2\vec{U} \cdot \vec{U} = m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2, \tag{6}$$

Dans le reprère propre de la particule, $E_0 = mc^2$, et $p = 0$, un cas particulier de l'équation (6). En générale on a

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2. \tag{7}$$

— On a trois équations/définitions importantes pour une particule massive :

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \gamma\left(c, \vec{v}\right), && \text{la quadri-vitesse} \\ \vec{P} &= m\vec{U}, && \text{la quadri-impulsion} \\ E &= \gamma mc^2, && \text{l'énergie totale relativiste} \end{aligned} \tag{8}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse habituelle dans un reprère inertiel, $\|\vec{v}\| = v$, et

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

— Plus généralement, on a pour l'énergie totale relativiste :

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2. \tag{9}$$

— Exercices pour la maison.

Résumé du cours

La transformation de Lorentz sert à quoi ?

— Elle permet d'obtenir les composantes d'un quadrivecteur dans un repère R' à partir des composantes du quadrivecteur dans un repère R en configuration avec R'.

— Elle permet d'obtenir tous les résultats de la relativité restreinte.

— Elle est relie à la symétrie.

L'énergie totale relativiste

— Le produit scalaire $\vec{P} \cdot \vec{P}$ donne

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

On distingue deux cas limites :

— l'approximation non relativitste lorsque $p^2c^2 \ll m^2c^4$

— l'approximation ultra relativiste lorsque $p^2c^2 \gg m^2c^4$

Pour l'approximation non-relativiste on peut écrire :

$$\begin{aligned} E &= mc^2 \left(1 + \frac{p^2c^2}{m^2c^4}\right)^{1/2} \\ &\approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2c^2}{m^2c^4}\right) \\ &= mc^2 + \frac{p^2}{2m} \end{aligned} \tag{10}$$

où $p = \gamma m v \approx m v$ car $v \ll c$. L'énergie cinétique comprend tous les termes autres que mc^2.

— L'énergie totale d'une particule libre est $\gamma m c^2$. Son énergie au repos étant mc^2 on en déduit que son énergie cinétique est :

$$E_{cin} = (\gamma - 1) mc^2$$

Cette expression est exacte, quelle que soit la vitesse de la particle.

— Un développement de Taylor (voir TD 5) donne

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \frac{5}{16}\beta^6 + \ldots$$

Le développement de l'énergie cinétique en puissances de β

s'écrit :

$$\begin{aligned}
E_{cin} &\approx mc^2[\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \frac{5}{16}\beta^6 + \ldots] \\
&= mc^2[\frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{4}\beta^2\frac{\beta^2}{2} + \frac{5}{8}\beta^4\frac{\beta^2}{2} + \ldots] \\
&= \frac{1}{2}mv^2[1 + \frac{3}{4}\beta^2 + \frac{5}{8}\beta^4 + \ldots]
\end{aligned} \tag{11}$$

Lorsque $\beta \ll 1$ on retrouve bien l'expression familière de la mécanique classique.

Particle de masse nulle

— Pour une particle de masse nulle la relation :

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

se ramène à :

$$E = pc$$

Par nature elle est ultra-relativiste.

— La relation

$$E = \gamma mc^2$$

permet d'écrire :

$$m = \frac{E}{c^2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Si la masse est nulle quelle que soit l'énergie on doit avoir $v = c$. De même si $v = c$ on doit avoir $m = 0$. Une particule de masse nulle se déplace à la vitesse de la lumière et une particule qui se déplace à la vitesse de la lumière doit avoir une masse nulle si son énergie est finie.

Photon

- La répartition spectrale de l'énergie rayonnée par un corps chauffé posait un problème que la thermodynamique classique et l'électromagnétisme ne pouvait pas résoudre.
- En 1900 Planck a pu trouver une fonction qui reproduisait bien les données expérimentale mais avec une hypothèse implicite que la physique classique ne pouvait justifier. En effet, les échanges d'énergie entre la matière et le rayonnement devaient se faire par quanta dont l'énergie est proportionnelle à la fréquence.
- En 1905 Einstein a émis l'hypothèse que l'énergie électromagnétique est elle-même quantifiée.
- Selon cette hypothèse l'énergie transportée par un faisceau de lumière est concentrée dans des grains localisés et

insécables. Ils ont reçu plus tard le nom de photons.

— D'après Einstein l'énergie d'un photon est :

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

où h est la constante de Planck ($6,626 \times 10^{-34}$ Js) et $\hbar = h/2\pi$.

— Le photon se déplaçant à la vitesse de la lumière est donc une particule de masse nulle.

— L'hypothèse d'Einstein a rencontré une vive opposition pendant plus de 15 ans car elle était considérée comme incompatible avec le phénomène d'interférence de la lumière. Pour Einstein les aspects corpusculaire et ondulatoire sont essentiels pour interpréter l'ensemble des phénomènes lumineux. C'est ce que l'on appelle la dualité onde-corpuscule.

— En 1917 Einstein a proposé d'attribuer une impulsion au photon en plus de son énergie.

— En 1923 de Broglie a proposé d'étendre la dualité onde-corpuscule à l'ensemble des objets microscopiques. A chaque particule d'impulsion $\vec{p}$ est associé une onde telle que :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

où h est la constante de Planck. On peut écrire l'impulsion sous la forme :

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$$

ou, sous forme vectorielle :

$$\vec{P} = \hbar\vec{K}$$

où $\vec{K}$ est le quadrivecteur d'onde. Cette relation a reçu de nombreuses confirmations expérimentales.

— Le quadrivecteur énergie-impulsion et le quadrivecteur d'onde sont donc proportionnels et on peut écrire :

$$\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \hbar \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$$

Le quadri-vecteur d'onde

— Une onde se déplaçant dans l'espace à trois dimensions peut être représentée par la fonction :

$$\psi(\vec{r}, t) = A\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

— La surface d'onde est le lieu des points pour lesquels la phase est constante à un instant donné.

— Après un déplacement $\Delta\vec{r}$ la phase devient : $\omega t - \vec{k} \cdot (\vec{r} + \Delta\vec{r})$. Elle reste constante à un instant donné si $\vec{k} \cdot \Delta\vec{r} = 0$. Il faut donc se déplacer perpendiculairement au vecteur d'onde pour garder la phase constante.

— La surface d'onde est donc perpendiculaire à $\vec{k}$ et la fonction considérée représente une onde plane.

— Pour suivre une crête la phase doit rester constante. Le déplacement doit être tel que :

$$\omega dt - \vec{k} \cdot d\vec{r} = 0$$

soit

$$\omega - \vec{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

La vitesse à laquelle il faut se déplacer est la vitesse de phase.

— Si le déplacement est dans la direction du vecteur d'onde la vitesse de phase est :

$$c = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \frac{\omega}{k}$$

L'onde se propage dans la direction de $\vec{k}$, c'est à dire perpendiculairement à la surface d'onde.

— Les ondes produites par deux sources peuvent interférer. C'est la différence de phase qui détermine l'éclairement en un point. Si un observateur observe une interférence destructive en un point un autre observateur en mouvement par rapport à lui fera la même observation. Cela s'explique facilement si la phase est un invariant de Lorentz.

— La phase est invariante dans un changement de repère si on peut l'écrire comme un produit scalaire de deux quadri-vecteurs. L'un de ces quadri-vecteurs est le quadri-vecteur position $(ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$ et l'autre est le quadri-vecteur d'onde $(\omega/c, k_x, k_y, k_z) = (\omega/c, \vec{k})$.

— La transformation de ses composantes est la même que pour tout quadri-vecteur :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ k'_{x'} \\ k'_{y'} \\ k'_{z'} \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire du quadri-vecteur d'onde par lui-même est le même dans tous les repèrs inertiels. La quantité $(\omega^2/c^2 - k^2)$ est donc invariante. Pour une onde plane elle est nulle et

$$\omega = ck$$

dans tous les repères.

L'effet Doppler

- Considérons une source au repos dans le repère R' qui joue donc le rôle de repère propre de la source. La fréquence propre de la source est ν' de sorte que sa pulsation propre est $\omega' = 2\pi\nu'$.
- Cette onde est dirigée vers un observateur immobile dans R. On dit que l'effet Doppler est longitudinal si l'onde arrive dans la direction du mouvement relatif et qu'il est transversal si elle arrive dans une direction perpendiculaire au mouvement relatif.

Effet Doppler longitudinal

— La source au repos dans R' émet une onde dans le sens négatif de l'axe des x. Le vecteur d'onde dans le repère propre de la source a pour composantes :

$$k'_{x'} = -k' \qquad k'_{y'} = 0 \qquad k'_{z'} = 0$$

La transformation de Lorentz permet d'obtenir les composantes du quadrivecteur d'onde dans le repère du laboratoire (R) :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ k'_{x'} \\ k'_{y'} \\ k'_{z'} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c} &= \gamma\frac{\omega'}{c} + \beta\gamma(-k') \\ k_x &= \beta\gamma\frac{\omega'}{c} + \gamma(-k') \\ k_y &= 0 \\ k_z &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

La relation de dispersion dans le repère propre de la source s'écrit :

$$\omega' = ck'$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\omega &= \gamma\omega' + \beta\gamma(-\omega') \\ &= \gamma(1-\beta)\omega' \\ \frac{\nu}{\nu'} &= \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad (13)\end{aligned}$$

Cette relation donne la fréquence reçue dans le repère du laboratoire en fonction de la fréquence propre d'une source que s'éloigne. Pour une source s'approchant du détecteur il faudrait changer β en $-\beta$. La longueur d'onde mesurée λ est liée à la longueur d'onde propre par la relation :

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\lambda'$$

Elle est plus grande que la longueur d'onde propre si la source s'éloigne.
Pour une onde mécanique il fallait distinguer le mouvement de la source et le mouvement de l'observateur car le milieu qui assure la propagation de l'onde joue le rôle de référentiel au repos absolu. Lorsque la source et l'observateur s'éloignent avec une vitesse très inférieure à celle de l'onde la fréquence mesurée est donnée par :

$$\nu = \nu' \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Dans le cas d'une onde éléctromagnétique on trouve pour

$v \ll c:$

$$\begin{aligned}\nu = \nu' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} &= \nu'(1-\beta)^{1/2}(1+\beta)^{-1/2} \\ &\approx \nu'(1-\beta/2)(1-\beta/2) \\ &\approx \nu'(1-\beta)\end{aligned} \tag{14}$$

Préparation pour l'examen

1. Lire les notes du cours de Jacques Langlois (*ne paniquez pas quand vous ne comprenez pas quelque chose* – essayer d'écrire précisement quoi vous ne comprenez pas).
2. Pour une vue d'ensemble sur les principes élémentaires, écoutez les vidéos des e-penser `https://www.youtube.com/watch?v=KX9QSjv0Ib0&feature=youtu.be` et `https://www.youtube.com/watch?v=_4Af9UrWEtc`.
3. Vérifier que vous pouvez résoudre les exércices des TDs. *Ne paniquez pas quand vous ne comprenez pas quelque chose.* Recommencez à 1 dans la section que vous ne comprendez pas.
4. Vérifier que vous pouvez résoudre les exércices des anciens examens. *Ne paniquez pas quand vous ne comprenez pas*

quelque chose. Recommencez à 1 dans la section que vous ne comprenez pas.

5. Faire des exercices. Lire des livres.
6. Si vous êtes bloqué m'envoyez un mél pour demander une consultation.
7. Recommencez à 1.

Au revoir

— Merci pour votre patience avec moi.

— Si vous voulez d'aide pour vos révisions pour l'examen, ne hésitez pas de m'envoyer un mél avec des questions ou pour demander un rendez-vous.

— Mon bureau est C303, adresse mail : robert.scott@univ-brest.fr