

Module de Spécialité

Année 2012

ONDES DANS LES FLUIDES GÉOPHYSIQUES

G. Roullet

Ecole Navale 2e année

Table des matières

1	Généralités	4
1.1	Introduction	4
1.2	Qu'est-ce qu'une onde?	5
1.3	Exemple sur un cas simple	6
1.4	Notion de caractéristique	8
1.5	Classification des EDP	8
1.6	Milieux dispersifs	10
1.7	Milieux lentement variable	12
1.8	Signature d'une onde	15
1.9	Ondes libres vs. ondes forcées	15
2	Ondes de gravité de surface	17
2.1	Introduction	17
2.2	Dérivation	18
2.3	Régimes	19
2.4	Hypothèse hydrostatique	20
2.5	Influence de la capillarité	20
2.6	Dérive de Stokes	20
2.7	La houle	22
3	Influence de la rotation	23
3.1	Introduction	23
3.2	Dérivation des ondes	24
3.3	Les ondes de gravito-inertie	25
3.4	L'ajustement géostrophique	26
3.5	Exemples d'ondes de gravito-inertie	28
3.6	L'onde de Rossby	31
4	Influence de la stratification	34
4.1	Introduction	34
4.2	Couplage entre les couches	35
4.3	Découplage par les modes baroclines	36
4.4	Ondes internes	40

Avant-propos Ce poly recouvre en partie seulement le cours donné à Navale en janvier 2012. Certains points de ce poly n'ont pas été vus (classification des EDPs, dérive de Stokes, ajustement géostrophique, modes baroclines etc), ils ne sont pas à savoir. Inversement, certains concepts ont été introduits en cours et sont à savoir (sillage d'ondes, onde de Kelvin, raidissement d'une onde de gravité). Ce poly est donc plutôt à voir comme une annexe aux notes de cours.

Guillaume Roulet, janvier 2012

Chapitre 1

Généralités

1.1 Introduction

La dynamique de l'atmosphère et des océans est décrite par les équations primitives. Bien que simples dans leur écriture, ces équations possèdent des solutions d'une infinité complexité puisque la turbulence, par exemple, est censée pouvoir être décrite par ces équations. La complexité des solutions vient des termes non linéaires de ces équations, du terme d'advection par exemple. Pour aborder cette complexité la démarche du physicien est de simplifier ces équations, c'est à dire de faire des hypothèses supplémentaires. On peut commencer par d'abord décrire les états d'équilibres, où le temps n'intervient plus. L'étape suivante consiste ensuite à étudier la solution (i.e. l'écoulement) au voisinage de cet état d'équilibre. De cette manière on est amené à linéariser les équations et on se ramène à un cadre mathématique beaucoup plus connu où tout un attirail d'outils existe. Les solutions au voisinage des positions d'équilibre font apparaître des oscillations pour les systèmes discrets à faible nombre de degré de liberté et des ondes pour les systèmes continus, on parle aussi de mode. Ces ondes peuvent être potentiellement instables si l'on s'intéresse à un équilibre instable.

L'objectif de ce cours est d'étudier les grands types d'ondes que l'on rencontre en dynamique des fluides géophysiques.

1.2 Qu'est-ce qu'une onde ?

Paradoxalement si l'on voit tous à peu près ce qu'est une onde il n'est pas très facile d'en donner une définition précise. En effet plus on cherche à être précis moins on est générique et plus on omet de phénomènes pouvant être une onde. Par exemple dire qu'une onde est une solution qui se met sous la forme $e^{i(kx-\omega t)}$ est trop restrictif car toutes les ondes ne sont pas planes (on peut avoir des paquets d'ondes). Nous opterons pour la définition du cours de ?

“Une onde est un phénomène capable de transporter de l'énergie sans transporter de matière.”

Cette définition garde l'idée centrale de **propagation** et d'**énergie** ou d'information. L'absence de transport de masse est une propriété fondamentale des ondes qui les distinguent des processus advectifs qui eux transportent l'information via le transport masse.

À cette définition ajoutons que la propagation repose sur **un mécanisme de rappel** (type rappel élastique) vers la position d'équilibre. En mécanique générale ce rappel peut prendre l'aspect d'une force (le poids du pendule pesant, la tension d'une corde), d'un couple (le couple de tension d'une corde tendue) etc. En dynamique des fluides géophysiques il n'y a que deux types de rappel : **la force de gravité** (combinée à la poussée d'Archimède) et la présence d'un **gradient de vorticité potentielle ambient** (cf. tableau 1.1).

La première force est relativement facile à imaginer : les eaux légères flottent au dessus des eaux denses, les écarts à cette position d'équilibre génèrent les ondes de gravité. Notons dès maintenant que les ondes de gravité prennent une grande variété de formes depuis les ondes internes (non hydrostatiques) jusqu'aux ondes longues de gravito-inertie en passant par les ondes de gravité de surface (les vagues) et les modes baroclines de gravité. Toutes ces ondes reposent, au bout du compte, sur le rappel dû à l'action combinée du poids et de la poussée d'Archimède.

Le deuxième rappel (gradient de VP) est bien entendu beaucoup plus obscur. Il est pourtant absolument essentiel. Il apparaît du fait que la Terre peut être vue comme un référentiel rapidement tournant où la force de Coriolis joue un rôle clef via l'équilibre géostrophique. Nous y reviendrons en détail au chapitre 3.

Donnons à présent une définition mathématique : “Une onde est une solution d'un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) hyperbolique”. Nous verrons plus loin ce qu'est précisément une EDP hyperbolique. Là encore cette définition est un peu trop restrictive car les équations hyperboliques étant du

	mode de gravité	mode de vortacité
type de rappel	force de gravité	gradient de VP
version stable	ondes de gravité	onde de Rossby
version instable	instabilité de Kelvin-Helmholtz	instabilité barotrope

TABLE 1.1 – Ondes et rappels associés apparaissant en GFD

deuxième ordre en temps admettent deux ondes pour solutions (une onde partant à gauche, une autre à droite). Or certaines ondes (l'onde de Rossby) dérivent d'équations du premier ordre en temps (la conservation de la vortacité potentielle VP) qui ne sont pas stricto sensu hyperbolique mais qui y ressemble fort car les solutions ont la propriété de propager l'énergie sans transport de matière. En anticipant sur la suite, on peut dire que l'équation admet une seule caractéristique au lieu de deux pour une équation hyperbolique, par conséquent l'onde résultant ne se déplace que dans un sens.

Pour compléter rappelons qu'une onde n'est pas forcément sinusoïdale, c'est avant tout une perturbation qui se propage et se déforme éventuellement en cours de route. La voix humaine est un exemple d'onde sonore, la forme de l'onde est très complexe lorsque nous parlons, elle peut devenir proche d'une sinusoïde si nous chantons mais dans tous les cas nous voyons qu'il serait trop restrictif de se cantonner au cas des ondes sinusoïdales. Cependant l'approche linéaire fait qu'il est souvent plus pratique de raisonner dans l'espace de Fourier et d'interpréter une onde en termes de paquet d'ondes sinusoïdales.

Dans la suite de ce chapitre nous aborderons plusieurs notions importantes relatives aux ondes

1. la notion de caractéristique
2. la notion de milieu dispersif
3. la notion de milieu variable

Pour bien comprendre comment cela fonctionne nous allons partir d'un cas très simple que nous allons complexifier au fur et à mesure et voir de nouveaux phénomènes apparaître.

1.3 Exemple sur un cas simple

L'équation d'onde la plus simple est l'équation suivante

$$\phi_{tt} - c^2 \phi_{xx} = 0. \tag{1.1}$$

Nous allons la résoudre en se donnant les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned}\phi(x, 0^+) &= 0 \\ \phi_t(x, 0^+) &= c\delta(x),\end{aligned}\tag{1.2}$$

correspondant à une impulsion sur la vitesse. Pour résoudre cette équation le plus simple est d'introduire le changement de variable $u = x - ct$ et $v = x + ct$, on a alors $\partial_{uv}\phi = 0$ qui s'intègre immédiatement en $\phi(u, v) = F(u) + G(v)$ où F et G sont fonctions des conditions initiales. Il ne reste plus qu'à traduire les conditions initiales sur F et G

$$\begin{aligned}F(x) + G(x) &= 0 \\ F'(x) - G'(x) &= \delta(x),\end{aligned}\tag{1.3}$$

on en déduit $F = -G$ et $F'(x) = \delta(x)/2$ d'où la solution complète

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2} [H(x + ct) - H(x - ct)].\tag{1.4}$$

Les conditions initiales créent un front qui se déplace ensuite selon les caractéristiques $x = \pm ct$ (Figure 1.1).

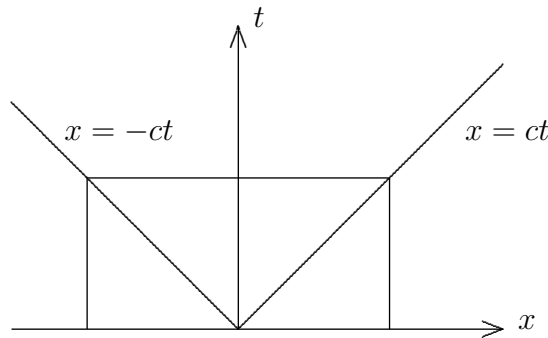


FIGURE 1.1 – Diagramme (x, t) de l'onde produite par un Dirac sur ϕ dans un milieu non dispersif.

Le changement de variable $(x, t) \rightarrow (u, v)$ n'est pas une pure astuce de calcul, au contraire il correspond à un élément fondamental des équations d'ondes. C'est la manière naturelle d'écrire la propagation des ondes. A l'aide des variables (u, v) la discontinuité initiale se propage le long des droites $u = \text{cste}$ et $v = \text{cste}$. Ces droites jouent donc un rôle fondamental : ce sont elles qui propage l'information, ces droites sont les **caractéristiques**.

1.4 Notion de caractéristique

Les caractéristiques sont les droites (courbes dans le cas général) $u(x, t)$ et $v(x, t)$ selon lesquelles se propage l'information. Pour bien comprendre comment la propagation opère discrétisons le temps. En un point donné l'information se propage selon les deux caractéristiques, puis en chaque point l'information est la somme des deux informations, celles venant de la gauche et celle venant de la droite. Au bout du compte l'information en un point dépend de ce qui s'est passé dans un cône, le cône de dépendance et l'information en un point affecte le futur dans un cône, le cône d'influence 1.4

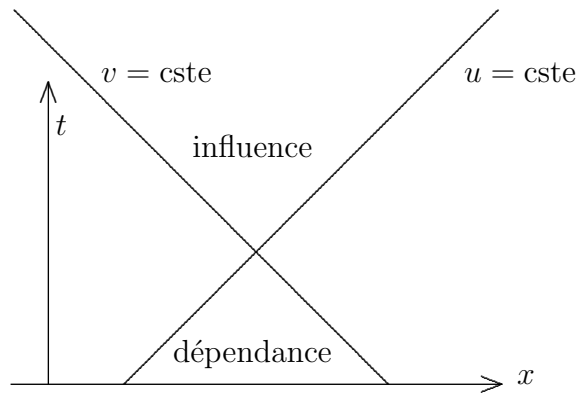


FIGURE 1.2 – Cône de dépendance et d'influence dans l'espace $x - t$.

Cette façon de concevoir la propagation d'ondes est à la base de méthodes numériques très efficaces pour résoudre les équations hyperboliques. Ces méthodes utilisent des schémas de Godunov. On se reportera à ? pour une excellente présentation sur le sujet.

1.5 Classification des EDP

La notion de caractéristique est complètement liée à la nature de certaines EDP. Pour comprendre la relation classons les EDP du second ordre en équations hyperbolique, parabolique et elliptique.

Considérons une EDP du second ordre à coefficient constant la plus générale qui soit, i.e.

$$a\partial_{xx}^2\phi + 2b\partial_{xy}^2\phi + c\partial_{yy}^2\phi + d\partial_x\phi + e\partial_y\phi + f\phi = g \quad (1.5)$$

Cherchons un changement de variable $u(x, y), v(x, y)$ tel que cette équation se factorise. Par factoriser nous entendons une forme où le nombre de dérivées secondes est minimal, ici il est de trois, il est possible de l'abaisser à deux ou 1 selon les cas.

Pour que le changement de variables soit possible il faut que les nouveaux vecteurs ∇u et ∇v forment une base de l'espace (x, y) ils ne doivent donc pas être colinéaires ce qui s'exprime par la condition

$$J(u, v) = u_x v_y - u_y v_x \neq 0.$$

Dans ce cas on peut se ramener à une équation de la forme

$$A\partial_{uu}^2\phi + B\partial_{uv}^2\phi + C\partial_{vv}^2\phi + \text{dérivées inférieures} = 0 \quad (1.6)$$

avec

$$A(u, v) = au_x^2 + 2bu_xu_y + cu_y^2 \quad (1.7a)$$

$$B(u, v) = au_xv_x + b(u_xv_y + u_yv_x) + cu_yv_y \quad (1.7b)$$

$$C(u, v) = av_x^2 + 2bv_xv_y + cv_y^2 \quad (1.7c)$$

Il se trouve la forme canonique ne dépend que du discriminant réduit

$$\Delta = b^2 - ac$$

et qu'il y a trois cas :

1. $\Delta > 0$ alors il est possible d'annuler A et C car en posant $w = u_x/u_y$ alors (1.7a) se transforme en

$$ay'^2 + 2by' + c = 0.$$

Cette équation possède deux racines réelles ce qui détermine les caractéristiques u et v . On montre alors que $C = 0$ aussi. L'équation canonique se met finalement sous la forme

$$\partial_{uv}^2\phi + \text{dérivées inférieures} = 0 \quad (1.8)$$

Il s'agit d'une **équation hyperbolique**. La solution en un point dépend du cône d'influence.

2. $\Delta = 0$ alors il y a une racine double et on peut annuler A et B ce qui donne la forme canonique

$$\partial_{vv}^2\phi + \text{dérivées inférieures} = 0 \quad (1.9)$$

Il s'agit d'une **équation parabolique**. Le domaine d'influence est le demi-plan inférieur (dans l'espace $x - t$).

3. $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de racines réelles, les caractéristiques n'existent pas. On ne peut annuler que B et la forme canonique est alors

$$\partial_{uu}^2 \phi + \partial_{vv}^2 \phi + \text{dérivées inférieures} = 0. \quad (1.10)$$

Il s'agit d'une **équation elliptique**. Le problème est fondamentalement non local : la solution en un point dépend de ce qui se passe sur tout le domaine. Il faut inverser l'opérateur elliptique pour déterminer la solution.

Lorsque l'EDP est du premier ordre, il n'y a qu'une caractéristique. Il n'y a donc qu'une seule condition initiale. L'information se propage alors effectivement le long des caractéristiques sans suivre le labyrinthe du cas où il y a deux caractéristiques. Une bonne référence sur le sujet est ?.

Transformation hyperbolique-elliptique Les écoulements lents ($fT \gg 1$) sont proches de l'état géostrophique, il est alors intéressant d'utiliser l'hypothèse quasi géostrophique (QG) filtrant les ondes de gravité et qui se traduit par une équation elliptique pour la fonction de courant. En effet l'équation des ondes de gravité (cf. chapitre 3) se transforme sous l'hypothèse QG ($\epsilon = U/fL = 1/fT \ll 1$) selon

$$\partial_{tt}^2 \eta = -f^2(1 - R^2 \Delta) \eta \longrightarrow f^2(1 - R^2 \Delta) \eta = 0. \quad (1.11)$$

On a bien la transformation d'une équation hyperbolique, en les variables (x, t) , en une équation elliptique, en les variables (x, y) . En pratique on utilise plutôt la fonction de courant ψ reliée à η par la géostrophie $g\eta = f\psi$.

D'une manière générale lorsque on regarde un problème hyperbolique sur des temps très longs alors la solution obéit à un problème elliptique.

Revenons à présent sur l'exemple (1.1) et supposons que $c(k)$. Pour y parvenir il faut modifier l'équation d'onde et introduire des termes dispersifs. Voyons quels sont les phénomènes nouveaux apparaissant.

1.6 Milieux dispersifs

Dans un problème d'onde on peut toujours représenter la solution sous forme d'une somme d'ondes planes. La solution générale d'une équation à deux ondes s'écrit donc

$$\phi(x, t) = \int [\hat{\phi}_+(k) e^{i(kx + \omega t)} + \hat{\phi}_-(k) e^{i(kx - \omega t)}] dk \quad (1.12)$$

elle est bien sous la forme $F(x + ct) + G(x - ct)$ avec ici l'onde se propageant à gauche (resp. à droite) écrite comme la superposition d'ondes planes monochro-

matiques. La relation de dispersion s'obtient en injectant une onde plane dans l'équation d'ondes (1.1). Le milieu est non dispersif car ω et k sont proportionnels.

Pour rendre le milieu dispersif il faut modifier l'équation d'ondes, en ajoutant un terme par exemple. Il est important de pouvoir raisonner aussi facilement sur l'équation d'ondes que sur la relation de dispersion, ce sont deux façons identiques de considérer le problème. Ajoutons un terme constant dans la relation de dispersion

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_0^2 \quad (1.13)$$

Cherchons à présent la solution correspondant à l'exemple pour ce milieu dispersif. Il se trouve qu'il existe une solution analytique que nous ne chercherons pas car la technique mathématique pour l'établir n'est pas familière. La solution fait apparaître une fonction de Bessel. A la place nous chercherons une solution en champ lointain, c'est à dire loin de la source. Il se trouve que loin des sources il est possible d'avoir facilement les principaux traits de la solution. Proche de la source les solutions sont toujours compliquées et pas forcément intéressantes. Pour trouver la solution en champ lointain nous allons utiliser la **méthode de la phase stationnaire**.

Cherchons la solution en x donné, loin de la source pour des temps longs. Sous ces conditions, l'intégrale (1.12) peut être vue comme une **intégrale rapidement oscillante**. Les ondes interfèrent alors négativement pour la plupart des valeurs de k et ne participent pas à la valeur moyenne. Seules les ondes pour lesquelles il y a interférences constructives participent à la solution. Ce cas se produit lorsque la phase est stationnaire, d'où le nom de la méthode. Au voisinage de k_0 tel que

$$\frac{d}{dk} (kx - \omega(k)t) \Big|_{k_0} = 0 \quad (1.14)$$

on a

$$\phi(x, t) \approx \hat{\phi}_-(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \quad (1.15)$$

l'onde est localement plane avec les caractéristiques $k_0, \omega_0 = \omega(k_0)$. L'égalité n'est pas exacte il y a en plus des termes correctifs sur l'amplitude et la phase (cf. Bender et Orzag pour plus d'informations).

Au point x et à l'instant t l'onde que l'on observe est celle qui s'est déplacée depuis l'origine avec la vitesse $c_g = d\omega/dk = x/t$. C'est la vitesse de propagation de l'information que l'on appelle **vitesse de groupe** et qu'il faut différencier de la vitesse de phase qui est la vitesse de déplacement des crêtes mais ne correspond à aucune vitesse réelle. D'une manière générale, quelque soit le phénomène ondulatoire, la vitesse de groupe définie par

$$\mathbf{c}_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} \quad (1.16)$$

est la vitesse de déplacement de l'énergie, la seule vitesse physiquement intéressante.

Revenons à présent sur la relation de dispersion (1.13). La figure 1.3 représente la solution à un Dirac initial.

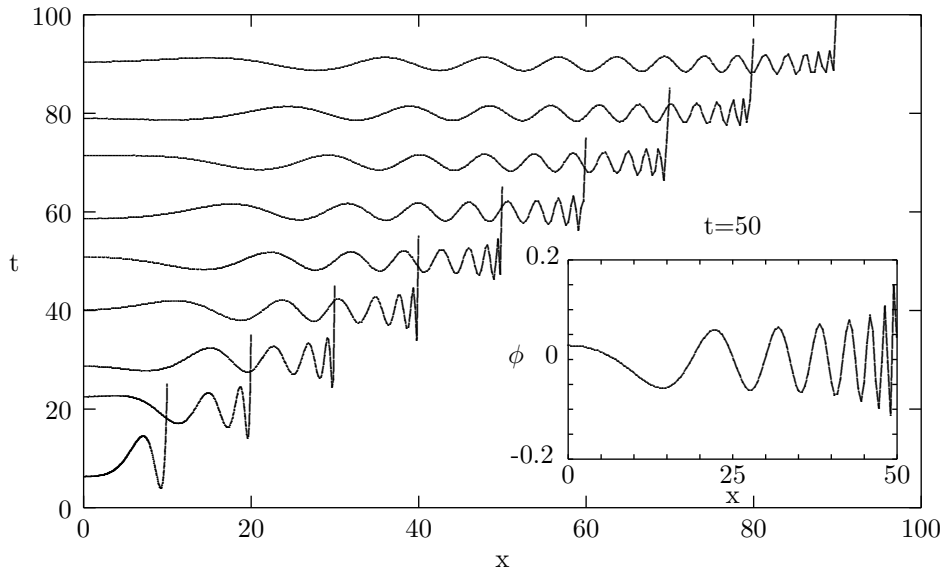


FIGURE 1.3 – Evolution d'une perturbation initiale en Dirac sur l'élévation dans un milieu obéissant à la relation de dispersion $\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_0^2$ avec $c = 1$ et $\omega_0 = 1$. La figure principale représente $\phi(x, t)$ à différents instants, l'encart représente l'instantané au temps $t = 50$.

L'allure de $\phi(x)$ se comprend facilement : les ondes longues ont une vitesse de groupe nulle, elles restent sur place tandis que les ondes courtes ont une vitesse de groupe valant 1. Le front de la perturbation est donc formé des ondes courtes. Si le milieu n'était pas dispersif on aurait à la place des oscillations un Dirac au point $x = 50$.

Complexions à nouveau l'équation d'onde initiale en supposant cette fois ci que le milieu est variable, c'est à dire que $c(x)$. Quel nouveau phénomène apparaît-il ?

1.7 Milieux lentement variable

Dans la réalité il est très fréquent que l'écoulement de base ou le milieu lui même sur lequel se propagent les perturbations soit non stationnaire et non homogène ; nous noterons génériquement que la relation de dispersion se met sous

la forme

$$\omega = \Omega(\mathbf{k}, \lambda(x, t)) \quad (1.17)$$

où λ est un paramètre entrant dans la relation de dispersion, par exemple la profondeur H pour les ondes de gravité, le courant moyen $U(x, t)$ etc.

Lorsque le milieu est lentement variable alors la théorie des rayons permet de dire comment vont varier les caractéristiques de l'onde au cours de la propagation. Nous ne démontrerons pas cette théorie (il y a deux techniques soit WKB soit hamiltonienne), nous nous contenterons d'en donner les résultats pratiques.

Dire que le milieu est lentement variable signifie que les variations sont faibles par rapport aux caractéristiques de l'onde ce qu'on traduit par

$$\partial_x \lambda / \lambda \ll k \quad \text{et} \quad \partial_t \lambda / \lambda \ll \omega. \quad (1.18)$$

A ce moment on considère des ondes localement planes, c'est à dire se mettant sous la forme

$$\phi(x, t) = A(x, t) e^{i\theta(x, t)} \quad (1.19)$$

et l'on pose que

$$\mathbf{k} = \nabla \theta \quad \text{et} \quad \omega = -\partial_t \theta. \quad (1.20)$$

On en déduit la conservation du nombre de crêtes, relation que l'on utilise pour démontrer les relations (1.22)

$$\partial_t \mathbf{k} + \nabla \omega = 0. \quad (1.21)$$

Il est alors très simple de montrer que

$$\begin{aligned} \partial_t \omega + \mathbf{c}_g \cdot \nabla \omega &= \partial_\lambda \Omega \partial_t \lambda \\ \partial_t \mathbf{k} + \mathbf{c}_g \cdot \nabla \mathbf{k} &= -\partial_\lambda \Omega \nabla \lambda \end{aligned} \quad (1.22)$$

Les rayons sont les lignes définies par

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{c}_g \quad (1.23)$$

le long desquelles ω et \mathbf{k} peuvent varier. Distinguons deux cas :

- le **milieu est stationnaire** alors $\partial_t \lambda = 0$ et donc $\omega = \text{cste}$. La conservation de la pulsation n'est donc pas une propriété intrinsèque de l'onde, cette conservation est liée à la stationnarité du milieu.
- le **milieu est homogène** alors $\nabla \lambda = 0$ et donc $\mathbf{k} = \text{cste}$. Inversement dans un milieu non homogène, \mathbf{k} est modifié en cours de route, c'est le phénomène bien connu de la **réfraction**. La théorie des rayons ne présuppose en rien du type d'onde, elle est donc parfaitement applicable aux ondes électromagnétiques et permet de retrouver les phénomènes de l'optique géométrique.

Par ailleurs l'expression (1.22) permet de retrouver comment \mathbf{k} est modifié lors de la réflexion de l'onde sur une paroi : la composante parallèle à la paroi est conservée, seule la composante perpendiculaire est modifiée. On se reportera à la réflexion des ondes internes sur une pente 4.4.5 pour une illustration.

Pour l'amplitude la démonstration est complexe dans le cas général, elle a été vue en TD sur le cas particulier d'une onde longue de gravité. Le résultat est

$$\partial_t(A^2) + \nabla(\mathbf{c}_g A^2) = 0 \quad (1.24)$$

qui s'interprète comme la conservation du flux d'énergie. Cela fait sens avec l'idée que l'on a de la vitesse de groupe : c'est bien elle qui propage l'énergie. Si l'onde ne dépose pas d'énergie (en régime permanent par exemple) alors on a $\nabla(\mathbf{c}_g A^2) = 0$. En réalité cela est faux, ce qui est réellement conservée c'est le flux d'action (la fameuse action de la mécanique hamiltonienne, qui coïncide avec A^2 pour les ondes linéaires).

Exemple des ondes longues de gravité Leur relation de dispersion est donnée par $\Omega(\mathbf{k}, \lambda) = \sqrt{gH(\mathbf{x})}|\mathbf{k}|$. Lorsque la profondeur varie on a donc

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{Dt} &= 0 \\ \frac{D\mathbf{k}}{Dt} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{H}}\nabla H \end{aligned} \quad (1.25)$$

les rayons ont donc tendance à s'aligner avec $-\nabla H$.

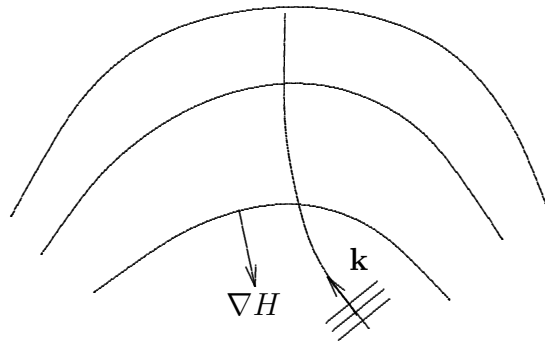


FIGURE 1.4 – Déviation d'une onde arrivant sur un rivage

Comme il est bien des surfeurs, les vagues ont tendance à arriver perpendiculairement à la plage (Figure 1.7). Les caps ont tendance à focaliser les vagues.

1.8 Signature d'une onde

Rappelons-nous que ce qui caractérise une onde (une onde de gravité vs. une onde de Rossby par exemple) ce n'est pas sa forme (i.e. sa structure spatiale) mais sa relation de dispersion, c'est à dire la façon dont elle se déplace et la structure des perturbations de vitesse et de pression par rapport au vecteur d'onde \mathbf{k} . Ce qui permet de différencier deux types d'ondes c'est aussi la structure du champ de vitesse et du champ de masse par rapport au vecteur d'onde \mathbf{k} .

1.9 Ondes libres vs. ondes forcées

Dans toute la suite du cours nous étudierons les ondes dites libres et laisserons de côté les ondes forcées. Quelle est la distinction ?

Une onde libre est une onde créée par une perturbation initiale et qui s'éloigne, elle obéit donc à une EDP¹ **homogène**, c'est à dire sans second membre. En d'autres termes les ondes libres sont les solutions générales du système d'EDP homogène.

Lorsque le système d'EDP possède un second membre, ce second membre peut être interprété comme un forçage. A ce moment on sait que la solution complète d'une EDP avec second membre est

$$\text{solution complète} = \text{solution générale de l'EDP homogène} + \text{solution particulière.}$$

la solution générale est la (ou les) ondes libres, la solution particulière est la solution forcée. Sauf dans quelques cas très particuliers (oscillations inertielles cf chapitre 3) les ondes se propagent. Au bout d'un certain temps il n'y en a plus, elles sont à l'infini, il ne reste donc plus que la solution particulière. Les **ondes libres correspondent aux transitoires** tandis que **les ondes forcées correspondent aux solutions d'équilibre**, d'équilibre dynamique car tout varie dans le temps si le forçage fluctue.

Pour un forçage donné (i.e. un second membre) le calcul d'une solution particulière est une tâche ardue. Si le forçage est indépendant du temps alors la solution est évidente mais si le forçage varie dans le temps (forçage périodique)

1. Nous ne considérons ici que des EDP linéaires à coefficients constants, dès qu'elles sont nonlinéaires il n'y a plus de théorie générale simple.

par exemple alors la solution particulière est compliquée. Elle s'exprime comme la convolution du forçage et des ondes libres, on se reportera au ? pour une très bonne présentation.

Le cas intéressant avec la solution forcée est que si le forçage a lui-même la forme d'une onde libre alors la solution particulière tend vers l'infini au cours du temps : c'est le phénomène de résonance.

Notons que dans le cas de l'oscillateur harmonique il suffit d'exciter l'oscillateur avec sa fréquence propre pour obtenir la résonance. Dans les cas des ondes il faut non seulement faire osciller avec le bon ω mais aussi le bon \mathbf{k} .

Chapitre 2

Ondes de gravité de surface

2.1 Introduction

Les ondes de gravité de surface sont les ondes apparaissant à l'interface air-eau : houle, vagues etc. Ces oscillations sont familières parce que à notre échelle de temps et d'espace, on les observe à la surface de la mer mais aussi d'un lac, d'une piscine etc.

Le mécanisme de base responsable de la propagation horizontale est la force de rappel constituée de la somme du poids et de la poussée d'Archimède : une bosse (resp. un creux) à l'interface air-eau n'est pas stable et tend à s'affaisser (resp. se combler), cette perturbation se propage de proche en proche.

Pour mettre en évidence ces ondes à partir des équations nous allons perturber (légèrement) un état d'équilibre, qui sera pris au repos. Les variables du problème sont $u, v, w, p(x, y, z, t)$ ainsi que $\eta(x, y, t), H(x, y)$ où η est le déplacement de l'interface air-eau par rapport à l'équilibre et H la hauteur d'eau de l'état d'équilibre. Remarquons que nous ne faisons pas intervenir la température ni la densité, nous supposons donc implicitement un océan homogène. Il s'agit d'une hypothèse pratique car simplificatrice mais pas forcément juste. L'océan présente une couche de surface homogène car bien mélangée dont l'épaisseur dépend de la latitude et de la saison mais si cette épaisseur est faible devant la longueur d'onde des ondes de gravité alors l'hypothèse d'un océan homogène est moins juste. Que se passe-t-il alors? Pour y répondre il faudra attendre le chapitre 4.

2.2 Dérivation

Un scaling permettrait de rationaliser les hypothèses suivantes :

- non dissipatif (*inviscid*), i.e. pas de viscosité
- non tournant
- homogène (ρ constant)
- petits mouvements par rapport à l'état au repos
- écoulement incompressible
- écoulement potentiel $\mathbf{u} = \nabla\phi$, ce qui a pour effet de supprimer le mode de vorticité et qui se justifie par le fait qu'en l'absence de viscosité il ne peut y avoir de création de vorticité donc si il n'y en a pas à $t = 0$ il n'y aura jamais.
- fond plat

En soustrayant l'état d'équilibre ($u = v = w = 0$, $p(z) = p_{\text{atm}} - \rho g z$) on obtient le système suivant

$$\begin{aligned} u_t &= -p_x \\ v_t &= -p_y \\ w_t &= -p_z - g \\ 0 &= u_x + v_y + w_z, \end{aligned} \tag{2.1}$$

où l'on a absorbé la densité ρ_0 dans la définition de p , ce que nous ferons continuellement par la suite. Les conditions aux limites sont les suivantes

i) en surface 2 CL : cinématique+dynamique appliquée en $z = \eta$ (avant linéarisation)

$$\begin{aligned} \eta_t + u\eta_x + v\eta_y &= w \\ p &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

qui se transforment après linéarisation en

$$\begin{aligned} \eta_t &= w(0) \\ p(0) &= g\eta. \end{aligned} \tag{2.3}$$

ii) au fond 1 seule CL (la réaction du fond est quelconque) : cinématique

$$w(-H) = 0. \tag{2.4}$$

L'écoulement étant irrotationnel on introduit le potentiel des vitesses ϕ défini par $\mathbf{u} = \nabla\phi$. On cherche des solutions du type : $(\eta, \phi) = (\eta_0, \phi_0)e^{i(k_\alpha x_\alpha - \omega t)}$ et on obtient

$$\begin{aligned} \eta &= a \cos(k_\alpha x_\alpha - \omega t) \\ \phi &= a \frac{\omega \cosh k(z+H)}{k \sinh kH} \sin(k_\alpha x_\alpha - \omega t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

avec $k = (k_\alpha k_\alpha)^{1/2}$.

La condition dynamique de surface nous fournit la relation de dispersion

$$\omega^2 = gk \tanh kH. \quad (2.6)$$

La courbe de dispersion $c = f(\lambda)$ est donnée sur la figure 2.1.

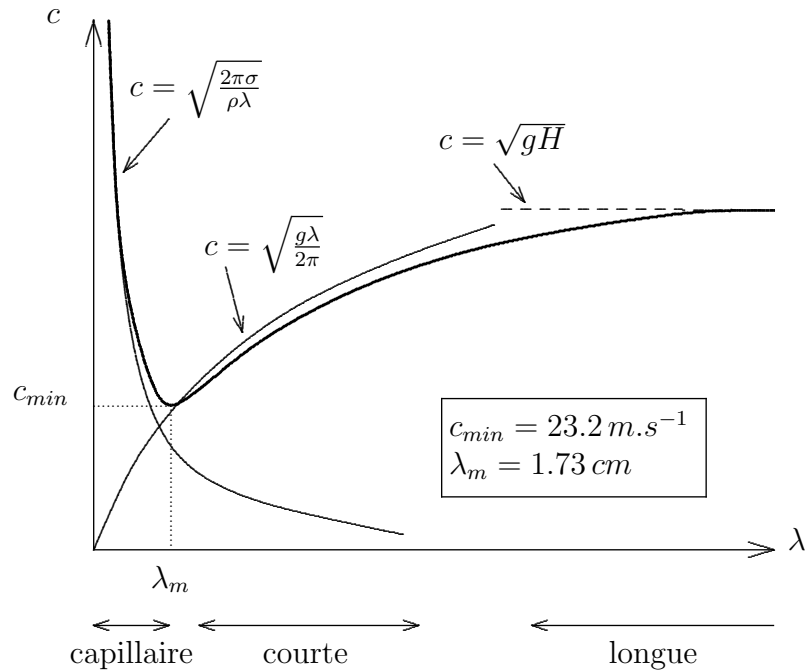


FIGURE 2.1 – Relation de dispersion des ondes gravito-capillaires

2.3 Régimes

On distingue 2 régimes : eau profonde, eau peu profonde.

- **Eau profonde** ou ondes courtes : $kH \gg 1$
 - $\omega = \sqrt{gk}$
 - ondes dispersives $\mathbf{c}_g = \frac{1}{2}\mathbf{c}$
 - $u(z)$ décroît exponentiellement. Les ondes ne sentent pas le fond.
Échelle caractéristique verticale $\delta \sim k^{-1}$
- **Eau peu profonde** ou ondes longues : $kH \ll 1$, (*shallow-water*)
 - $\omega = \sqrt{gH}k$
 - ondes non dispersives $\mathbf{c}_g = \mathbf{c}$

- $u(z)$ est pratiquement uniforme. Les ondes sentent le fond, il s'agit du mode barotrope
- les ondes vraiment longues sentent la rotation de la Terre, ce seront les ondes de gravito-inertie (cf. chapitre 3).

2.4 Hypothèse hydrostatique

Le nombre sans dimension qui détermine le régime est le rapport d'aspect au carré δ^2 où $\delta = kH$. En effet l'équation adimensionnée pour w s'écrit

$$w_t = -\frac{1}{\delta^2} p_z. \quad (2.7)$$

Lorsque

- $\delta^2 \ll 1$ on a $p_z = 0$, l'écoulement est barotrope,
- $\delta^2 \gg 1$ on a $w_t = 0$ (i.e. $w = 0$) sauf dans une mince couche de surface d'épaisseur L : l'onde est confinée à la surface et on retrouve la décroissance exponentielle avec la profondeur.

Cette hypothèse est centrale et permet de classer les ondes en deux grandes types : les ondes hydrostatiques et celles qui ne le sont pas (cf tableau en annexe).

2.5 Influence de la capillarité

Si l'on avait tenu compte de la tension superficielle (effet de capillarité alors la condition dynamique de surface aurait été différente car alors $p(z = \eta) = p_s$ où p_s est donnée par la formule de Laplace

$$p_s = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = -\sigma \frac{\eta_{\alpha\alpha}}{(1 + \eta_{\alpha\alpha}^2)^{3/2}} \quad (2.8)$$

qui a pour conséquence de donner la relation de dispersion suivante

$$\omega^2 = gk \left(1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g} \right) \tanh kH \quad (2.9)$$

valable jusqu'aux (petites) échelles de la capillarité.

2.6 Dérive de Stokes

Lors du passage la moyenne eulérienne du courant est nulle : en un point fixe, la vitesse oscille dans le temps mais sa moyenne est nulle. Il est tentant d'en

déduire qu'il en est de même pour les parcelles de fluide, cela n'est qu'imparfaitement juste. Dans l'approximation linéaire les parcelles n'ont pas de déplacement, la vitesse lagrangienne est nulle en moyenne. A l'ordre 2 en la perturbation cela n'est plus juste, la moyenne lagrangienne est non nulle ; les parcelles se déplacent, faiblement, mais elles se déplacent. Ce phénomène porte le nom de dérive de Stokes.

Une démonstration classique est donnée dans le ?, elle se restreint au cas des ondes courtes ($kH \gg 1$). Il se trouve que la dérive de Stokes n'est pas associée à l'hypothèse d'ondes courtes, elle subsiste lors du passage à l'hydrostatique. Elle est en fait associée à l'hypothèse d'un écoulement irrotationnel. Nous utiliserons la démarche de Eames et McIntyre (1999), parfaitement générale.

Considérons une onde plane irrotationnelle monochromatique, sa vitesse \mathbf{u} est donc définie par le potentiel $\phi(x, t)$ selon $\mathbf{u} = \nabla\phi$. Étant une onde plane, elle se propage avec la vitesse de phase \mathbf{c} et vérifie

$$\partial_t\phi + \mathbf{c} \cdot \nabla\phi = 0. \quad (2.10)$$

Cherchons à exprimer le déplacement d'une parcelle. Pour cela il faut suivre la parcelle, soit $\mathbf{X}(a, t)$ sa position repérée par un label a et le temps t . La vitesse de cette parcelle est donnée par

$$\frac{D\mathbf{X}}{Dt} = \mathbf{u} = \nabla\phi. \quad (2.11)$$

En utilisant (2.10) on a

$$\mathbf{c} \cdot \frac{D\mathbf{X}}{Dt} = -\partial_t\phi. \quad (2.12)$$

Exprimons le second membre comme une dérivée matérielle

$$\partial_t\phi = \frac{D\phi}{Dt} - \mathbf{u} \cdot \nabla\phi, \quad (2.13)$$

on a finalement

$$\mathbf{c} \cdot \frac{D\mathbf{X}}{Dt} = -\frac{D\phi}{Dt} + \nabla\phi \cdot \nabla\phi. \quad (2.14)$$

Intégrons cette dernière équation sur la période T de l'onde

$$\mathbf{c} \cdot \left[\mathbf{X}(a, T) - \mathbf{X}(a, 0) \right] = - \left[\phi(a, T) - \phi(a, 0) \right] + \int_0^T (\nabla\phi)^2 dt \quad (2.15)$$

Le membre de gauche nous donne le déplacement de la parcelle au cours de la période, le premier terme du membre de droite est nulle car le phénomène est périodique de période T , le deuxième terme est le terme proportionnel à

l'amplitude de l'onde au carré et nous donne donc la formule pour la vitesse de la dérive de Stokes v_s

$$v_s = \frac{1}{cT} \int_0^T (\nabla\phi)^2 dt \quad (2.16)$$

La seule hypothèse a été de dire que l'onde était irrotationnel. Donc toutes les ondes satisfaisant cette condition ont une dérive de Stokes. Il est donc inexact de dire qu'une onde ne transporte pas de matière : une onde irrotationnelle transporte de la masse à l'ordre 2.

2.7 La houle

Le meilleur exemple océanique d'onde de gravité de surface est la houle. La houle s'observe lorsqu'il y a des vagues alors qu'il n'y a pas de vent. Ces vagues se sont échappées d'une région de l'océan éloignée de l'observateur où a sévit une tempête. Lors d'une tempête, les vagues d'abord courtes et de faible amplitude se creusent et s'allongent. Ces vagues une fois générées se propagent vers les côtes.

Les échelles de longueur typiques sont quelques dizaines à quelques centaines de mètres. Ces ondes ne sentent pas le fond, du moins en plein océan. Sous la thermocline on ne sent donc plus ces ondes de gravité, elles sont complètement amorties. A l'approche des côtes, la longueur d'onde diminue et l'amplitude augmente (cf. TD).

Chapitre 3

Influence de la rotation

3.1 Introduction

La dynamique des fluides géophysique possède quatre ingrédients très spécifiques la différenciant de la dynamique des fluides classiques :

- i) Le référentiel est tournant, à cause de la rotation de la Terre sur elle-même donnant un rôle de premier ordre à la force de Coriolis.
- ii) Les écoulements se font sur la sphère et non dans un plan horizontal.
- iii) La topographie sous-marine est complexe (marges continentales, dorsales médio-océaniques, monts sous-marins etc.).
- iv) Le fluide est fortement stratifié, les courants sont surtout le long des isopycnes et peu à travers les isopycnes, les échanges verticaux sont difficiles.

Ces quatre ingrédients rendent la dynamique des fluides géophysiques particulièrement compliquée.

Dans ce chapitre nous étudierons spécifiquement les effets de la rotation en mettant de côté les trois autres ingrédients. Nous les réintroduirons plus tard (les (ii) et (iii) à la fin ce chapitre, le (iv) sera l'objet du chapitre 4). Cela nous conduit naturellement à utiliser les hypothèses suivantes :

- plan f ,
- fond plat,
- fluide homogène et en ajoutant l'hypothèse hydrostatique, i.e. $kH \ll 1$, on se ramène au modèle à une couche ou modèle *shallow water*.

Les équations sont écrites avec les variables η , h et H définies sur le schéma.

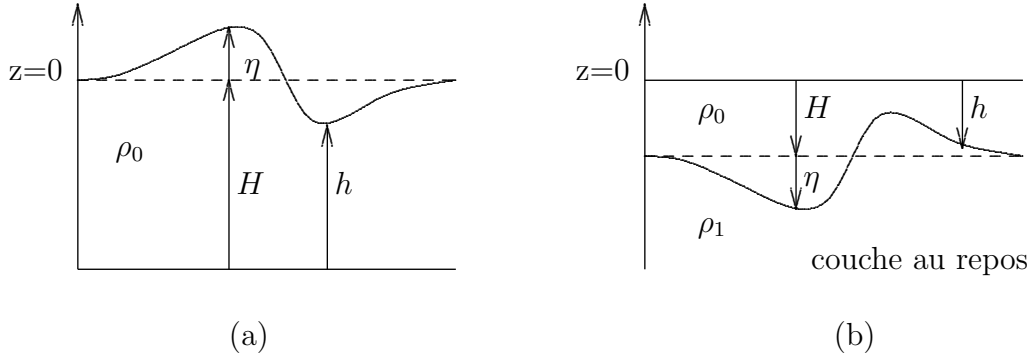


FIGURE 3.1 – Modèle une couche décrivant le mode barotrope ou externe (a) et modèle 1 + 1/2 couche décrivant le premier mode barocline (b). Les équations de ce dernier modèle sont formellement les mêmes à condition de remplacer la gravité g par la gravité réduite $g' = g(\rho_1 - \rho_0)/\rho_0$

3.2 Dérivation des ondes

Pour obtenir l'équation d'onde on linéarise les équations shallow water autour d'un état d'équilibre qui, pour simplifier, sera l'état d'équilibre. On injecte ensuite des solutions en ondes planes de la forme $\exp[i(kx - \omega t)]$ qui transforme le système de EDP en un système d'équations algébriques de la forme

$$\begin{pmatrix} -i\omega & -f & igk_x \\ +f & -i\omega & igk_y \\ iHk_x & iHk_y & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Ce système est homogène (sans second membre) il admet donc des solutions non nulles à condition que son déterminant soit nul ce qui détermine la relation de dispersion

$$\omega(\omega^2 - gHk^2 - f^2) = 0, \quad (3.2)$$

avec $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Cette relation admet trois racines, il y a donc trois ondes possibles. Le nombre 3 provient fondamentalement du fait qu'il y avait au départ trois équations d'évolutions, c'est à dire trois variables pronostiques.

Ces trois ondes ou modes sont

- i) le mode vortical : $\omega = 0$,
- ii) les deux ondes de gravito-inertie : $\omega^2 = gHk^2 + f^2$.

3.3 Les ondes de gravito-inertie

On parle aussi parfois d'ondes de gravito-inertie mais alors le nom ne se rapporte plus à la réalité physique ce qui obscurcit le sens.

La relation de dispersion se met sous la forme

$$\omega^2 = f^2(1 + R^2k^2), \quad (3.3)$$

où $R = \sqrt{gH}/f$ est le rayon de déformation, qui suggère le scaling suivant

$$\omega = f\omega', \quad \text{Bu} = kR \quad (3.4)$$

où Bu est le nombre de Burger, cela conduit à la relation de dispersion adimensionnée

$$\omega'^2 = 1 + \text{Bu}, \quad (3.5)$$

La figure 3.2 illustre les différents régimes

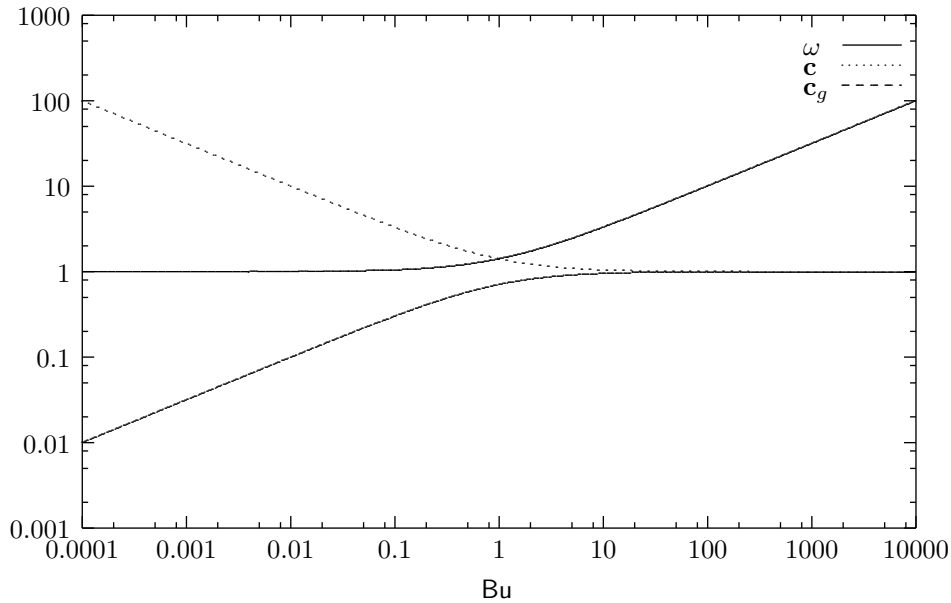


FIGURE 3.2 – Relation de dispersion adimensionnée des ondes de gravito-inertie

Voici les ordres de grandeur typiques pour les rayons de déformation :

- mode externe : $R = 2000 \text{ km}$ avec $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$, $H = 4000 \text{ m}$, $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.
- 1er mode barocline : $R = 40 \text{ km}$.

Etudions les 3 régimes suivants

- $Bu \gg 1$: les ondes sont alors non dispersives, la rotation est sans effet. Ce sont les ondes courtes (par rapport au rayon de déformation) mais longues¹ (par rapport à la profondeur). Le champ de vitesse \mathbf{u} de l'onde est parallèle à \mathbf{k} car dans ce régime

$$-i\omega\mathbf{u} = -ip\mathbf{k}.$$

Les parcelles oscillent longitudinalement au passage de l'onde.

- $Bu \sim 1$ Les effets de propagation et de rotation sont du même ordre. Les parcelles décrivent des ellipses anticycloniques d'excentricité $e = \omega/f$.
- $Bu \ll 1$ La rotation prédomine sur la propagation. Les ondes sont alors **inertielle**s. Les parcelles décrivent des cercles de sens anticyclonique. Les ondes inertielles ne se déplacent pas, elles restent sur place car $\mathbf{c} = 0$ et $\mathbf{c}_g = 0$ ce qui leur confère des propriétés déroutantes.

Exemple d'application numérique : considérons une onde d'amplitude $u = 0.1 \text{ m/s}$ alors le rayon r du cercle est tel que $2\pi r/u = 2\pi/f$ d'où $r \sim 1 \text{ km}$.

3.4 L'ajustement géostrophique

Question : quelle est la réponse du “pavé dans la mare” en milieu tournant ?

- **fluide non tournant**

repos \rightarrow choc initial \rightarrow rayonnement d'ondes de gravité \rightarrow repos

- **fluide tournant**

repos \rightarrow choc initial \rightarrow rayonnement d'ondes de gravito-inertie \rightarrow ???

Mathématiquement on cherche la réponse aux conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned}\eta(x, 0) &= \delta(x) \\ \partial_t \eta(x, 0) &= 0\end{aligned}\tag{3.6}$$

Il y a donc rayonnement d'ondes de gravité. **Le milieu étant dispersif** les ondes les plus courtes partent en premier (vu la relation de dispersion avec la vitesse de groupe $c_g = \sqrt{gH}$, les plus longues $\omega \sim f$ restent sur place car $d\omega/dk = 0$).

Quel est l'état final ? La perturbation initiale se projette sur chacun des trois modes (les deux de gravité et le mode vortical). Les deux modes de gravité rayonnent la perturbation à l'infini en revanche le mode vortical reste sur place. **L'état final n'est donc pas l'état au repos mais la projection de l'état initial sur le mode vortical.** Pratiquement le mode vortical est le vecteur propre du système (3.1) associé à la valeur propre $\omega = 0$. Ce mode correspond à l'équilibre géostrophique (car $\omega = 0$ implique que $\partial_t = 0$).

1. Les grandeurs physiques ne sont jamais ni petites ni grandes en soi, tout dépend par rapport à quoi on se réfère. Le seul référent qui peut être implicite concerne un nombre adimensionné, à ce moment dire qu'il est petit sous-entend qu'il est petit par rapport à 1...

Le temps caractéristique d’ajustement est la période d’inertie f^{-1} , la perturbation initiale (le Dirac) s’étend sur une distance de l’ordre du rayon de déformation.

On se référera au ? ainsi qu’au ? pour une excellente présentation. La vision qui est donnée se place implicitement dans le régime $Bu \sim 1$, les limites asymptotiques sont tout aussi intéressantes.

- Cas $Bu \gg 1$: on retrouve l’expérience du “pavé dans la mare”.
- Cas $Bu \ll 1$: les ondes inertielles restent bloquées sur la perturbation initiale. L’état final est donc une superposition du mode vortical (circulation géostrophique) et d’ondes inertielles. Le champ de vitesse s’annule de manière cyclique.

Complétons à présent cette vision de l’ajustement géostrophique par un raisonnement sur la vorticité potentielle (la VP).

La VP est définie par

$$q = \frac{f + \zeta}{H + \eta}.$$

Elle est matériellement conservée dans les équations shallow water complètes

$$\frac{Dq}{Dt} = 0.$$

La linéarisation de la VP conduit à écrire

$$q = q^{(0)} + q^{(1)} + \dots,$$

où $q^{(0)}$ est la VP à l’ordre 0 en la perturbation, aussi appelée VP ambiante et $q^{(1)}$ la VP à l’ordre 1, la VP de la perturbation où anomalie de VP. On a

$$\begin{aligned} q^{(0)} &= \frac{f}{H} \\ q^{(1)} &= \frac{f}{H} \left(\frac{\zeta}{f} - \frac{\eta}{H} \right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

A l’ordre 1 on a donc

$$\partial_t q^{(1)} + \mathbf{u}^{(1)} \cdot \nabla q^{(0)} = 0. \tag{3.8}$$

En l’absence de gradient de VP ambiant l’anomalie de VP est donc fixée sur place. Notons que les **ondes de gravito-inertie ne transportent pas d’anomalie de VP** car

$$H \partial_t \zeta = f \partial_t \eta.$$

C’est une propriété essentielle des ondes de gravité.

Revenons au problème de l’ajustement géostrophique. La perturbation initiale crée une anomalie de VP, une fois que les ondes de gravité sont parties, l’anomalie

de VP est toujours au même endroit et l'état d'équilibre est l'état géostrophique qui s'écrit

$$f\zeta = g\nabla^2\eta.$$

Aussi l'anomalie de VP initiale $q^{(1)}(x, 0)$ contraint complètement l'équilibre selon

$$(R^2\nabla^2 - 1)\eta'(x, \infty) = \frac{1}{q^{(0)}}q^{(1)}(x, 0), \quad (3.9)$$

avec $\eta' = \eta/H$.

La conclusion fondamentale est que si la circulation est équilibrée géostrophiquement, i.e. dépourvue d'ondes de gravité, alors la VP détermine complètement toute la circulation. En effet (3.9) permet de déterminer η on en déduit ensuite \mathbf{u} via l'équilibre géostrophique. C'est la **notion d'inversion de VP**.

Il existe un pan entier de la GFD qui s'intéresse à la dynamique vorticale, i.e. la dynamique dépourvue d'ondes de gravité. Il n'y alors qu'une seule variable d'évolution (variable pronostique) : c'est la VP, toutes les autres variables s'en déduisent par inversion. L'équation d'évolution est l'advection matérielle de VP.

Pour finir exploitons la relation (3.9). Etant donné une anomalie de VP positive alors le η associé est négatif ce qui correspond à un trou donc à un cyclone. La relation de signe entre η et q est évidente dans l'espace de Fourier, en effet

$$-(R^2K^2 + 1)\hat{\eta} = \hat{q}$$

il est donc évident que η et q sont de signes contraires.

3.5 Exemples d'ondes de gravito-inertie

Voici quelques exemples réels

l'onde de marée. La structure complexe est due aux ingrédients supplémentaires suivants (Figure 3.3) : courbure de la Terre, topographie et le plus important qualitativement par rapport à ce que nous venons de voir **l'onde est forcée**. Jusqu'à présent nous n'avons étudié que les ondes libres mais sous l'action d'un forçage périodique (le potentiel de marée) le milieu répond par une onde forcée. Mathématiquement l'onde libre est la solution de la PDE homogène tandis que la solution forcée est la solution particulière de la PDE avec second membre. Cet aspect onde forcée ne sera pas abordé dans le cours.

un raz-de-marée. Il s'agit d'une onde libre excitée par une secousse sismique (Figure 3.4). La longueur d'onde en plein océan est typiquement celle de

la secousse (quelques dizaines de kilomètres), elle est donc dans le régime $Bu \gg 1$. Les dégâts importants sont causés par la concentration du flux d'énergie dans une épaisseur de fluide plus petite à l'approche de la côte.

le produit des fluctuations de la pression atmosphérique.

Lorsqu'une dépression passe au dessus de l'océan il se produit une aspiration du niveau de la mer ce qui provoque la génération d'ondes de gravito-inertie.

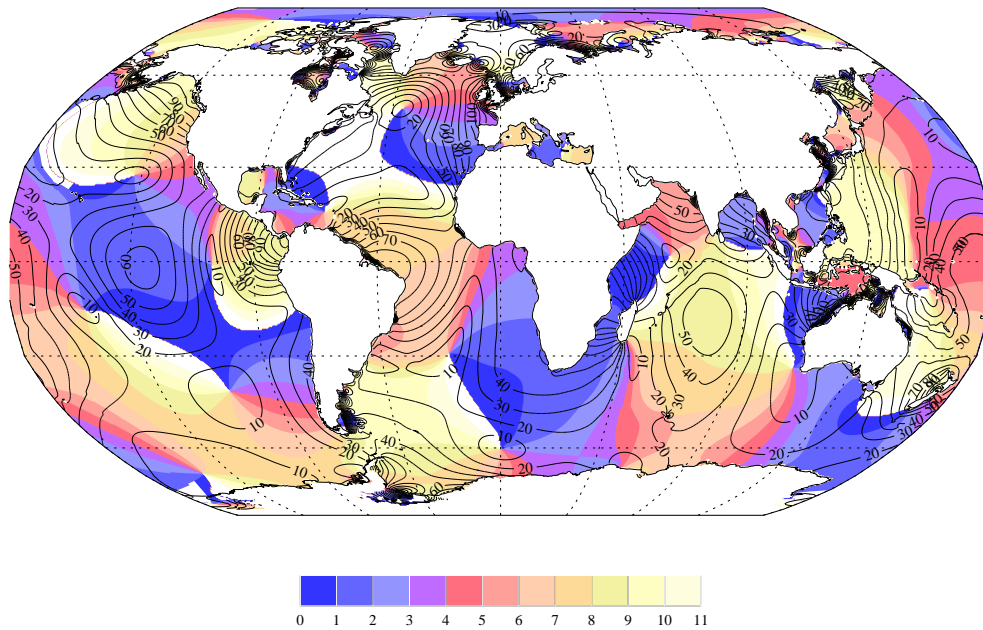


FIGURE 3.3 – Onde de marée M2 (issu d'un modèle). Les couleurs désignent la phase (exprimée en douzièmes de période) et les contours l'amplitude. Les points de convergence de la phase (et d'amplitude nulle) sont les points amphidromiques autour desquels l'onde tourne.

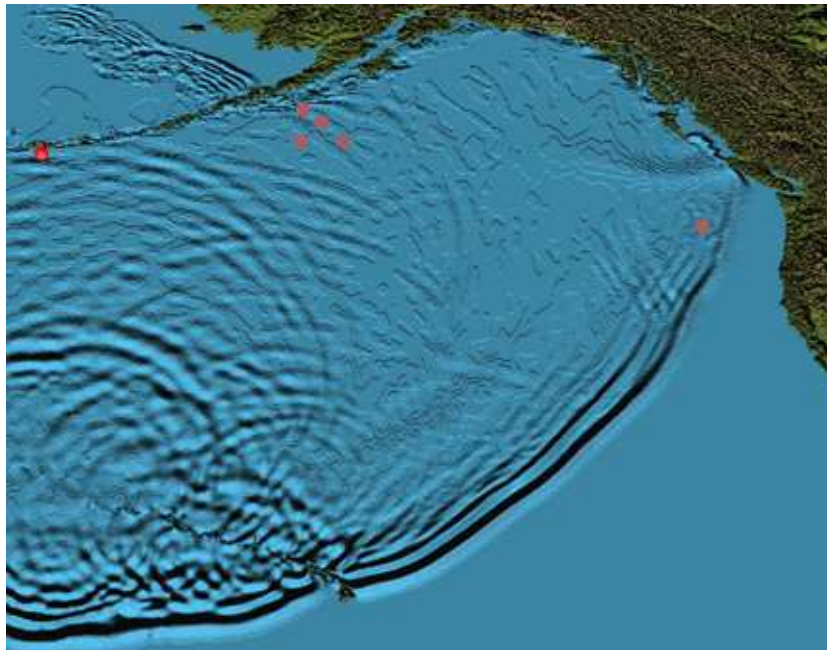


FIGURE 3.4 – Tsunami se propageant dans le Pacifique (issu d'un modèle). On distingue nettement le front de l'onde, ainsi que des réfractions et même de la réflexion partielle sur les îles Hawaiï.

3.6 L'onde de Rossby

Revenons sur le troisième mode permis par les équations shallow water et correspondant à la solution $\omega = 0$ de la relation de dispersion. Il s'agit du mode vortical. Avec les approximations que nous avons faites il correspond à l'équilibre géostrophique (c'est évident en annulant les dérivées temporelles dans les équations de départ). En l'état ce mode est dégénéré car il décrit un état d'équilibre.

Si nous faisons à présent l'hypothèse qu'il existe un gradient de vortacité potentielle ambient, i.e. f/H varie, alors la dégénérescence est levée et le mode se propage : il devient l'onde de Rossby. L'onde de Rossby étant donc la version linéarisée de la dynamique vorticale, on suppose toujours qu'elle se propage sur un état équilibré géostrophiquement, i.e. dépourvu d'ondes de gravité. On supposera donc que la dynamique est entièrement décrite par la VP.

La conservation matérielle de la VP à l'ordre 1 conduit donc naturellement à l'équation de l'onde de Rossby

$$(R^2\nabla^2 - 1)\partial_t\eta = \beta k_x\eta,$$

où l'on a supposé que H reste constant et que le gradient de VP ambient provient uniquement des variations du paramètre de Coriolis $f = f_0 + \beta y$. La relation de dispersion des ondes de Rossby est donc

$$\omega = -\frac{\beta R^2 k_x}{1 + K^2 R^{-2}}. \quad (3.10)$$

Les régimes asymptotiques sont

- $Bu \ll 1$ on a alors $\omega = -\beta R^2 k_x$, les ondes sont nondispersives et leur **vitesse de groupe est vers l'Ouest**.
- $Bu \gg 1$ les ondes sont dispersives, la vitesse de phase est bien vers l'Ouest mais la vitesse de groupe, la seule importante, est **vers l'Est**.

Il est donc faux de dire que les ondes de Rossby se déplacent vers l'Ouest, tout dépend du régime que l'on considère. Afin de mieux voir les régimes apparaître adimensionnons la relation de dispersion (3.10)

$$\omega = \omega' / (\beta R), \quad Bu = kR \quad (3.11)$$

ce qui donne

$$\omega' = -\frac{Bu^{\frac{1}{2}}}{1 + Bu} \quad (3.12)$$

La figure 3.5 illustre certaines propriétés des ondes de Rossby. Retenons

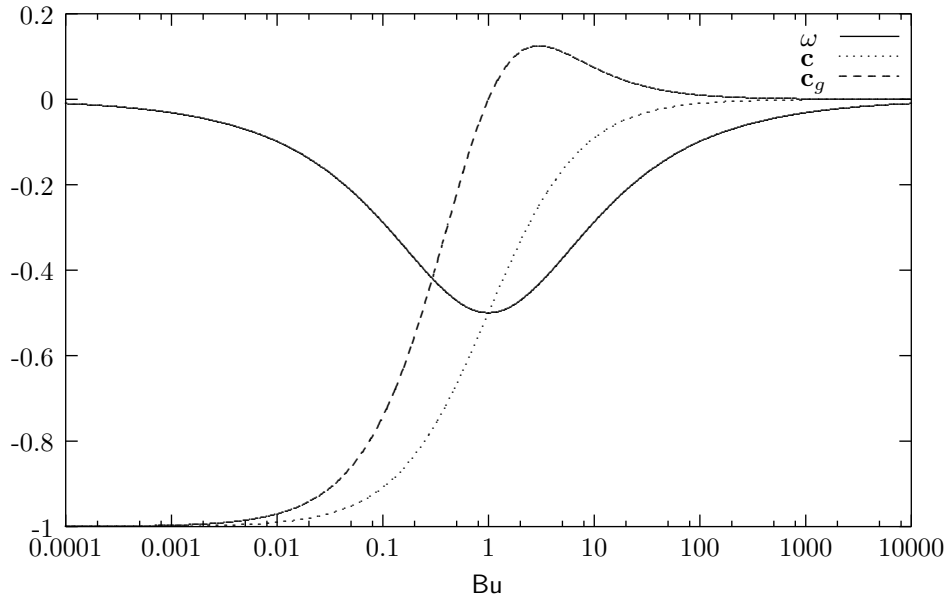


FIGURE 3.5 – Relation de dispersion adimensionnée des ondes de Rossby planétaires. La pulsation ω' est négative car Bu est choisi positif.

- la vitesse de phase est toujours vers l'Ouest
- la vitesse de groupe est
 - vers l'ouest pour les ondes longues (devant R)
 - vers l'est pour les ondes courtes
- les ondes longues sont non dispersives ($\omega \sim R^2 \beta k_x$)

Par ailleurs notons que la propagation est anisotrope :

- la propagation est purement zonale pour $Bu \ll 1$
- la propagation peut avoir une composante méridienne pour $Bu \gtrsim 1$
- les ondes courtes $Bu \gg 1$ ne se propagent pas.

3.6.1 Mécanisme

Il n'y a pas de force de rappel, ni de couple de force. Le mécanisme de base est l'existence d'un

gradient de vorticité potentielle ambient.

La figure 3.6 illustre le mécanisme. Les parcelles se déplaçant vers le Nord voient f augmenter, pour conserver leur VP elles acquièrent une vorticité relative $\zeta < 0$. Le champ de vitesse résultant du déplacement de toutes les parcelles est une vitesse vers l'Ouest, comme on peut le voir en raisonnant sur l'axe.

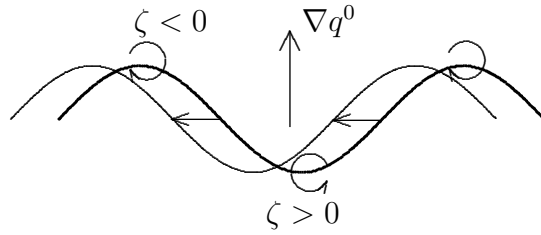


FIGURE 3.6 – Mécanisme de propagation des ondes de Rossby. Le déplacement des parcelles perpendiculairement au gradient de VP ambiant leur fait acquérir de la vorticité relative créant ainsi une ligne de vortex s’influençant mutuellement. L’effet combiné est d’advecter la perturbation vers l’Ouest.

Le gradient de VP est dû aux variations de f/H i.e. effet β

- planétaire
- topographique

Nous verrons que dans le cas stratifié $q^{(0)} = f\partial_z\bar{\rho}/\rho_0$ de sorte qu’une pente des isopycnes (la thermocline par exemple) peut constituer un gradient de VP sur lequel s’appuient les ondes de Rossby.

Notons aussi qu’un cisaillement de courant moyen créer un terme supplémentaire de VP moyen car alors $\zeta^{(0)} \neq 0$ (cf. chapitre ??) et $q^{(0)} = (f + \zeta^{(0)})\partial_z\bar{\rho}$.

3.6.2 Rôle des ondes de Rossby

Les ondes de Rossby sont produites dès que l’équilibre de la VP à l’ordre 0 est modifié. Un des termes de forçage de la VP est le rotationnel du vent ; si il varie il y a alors génération d’ondes de Rossby.

Les ondes de Rossby apparaissent lors de l’ajustement d’une gyre suite à la mise en place d’une tension de vent. Ce sont elles qui mènent à l’équilibre de vorticité (l’équilibre de Sverdrup), tout comme les ondes de gravito-inertie mènent à l’équilibre géostrophique.

Chapitre 4

Influence de la stratification

4.1 Introduction

Dans tout ce qui suit nous ferons l'approximation que la stratification au repos de l'océan est horizontale. Comme d'habitude cette approximation dépend de l'échelle à laquelle on regarde les phénomènes. La présence de courants moyens introduit une pente des isopycnes (via le vent thermique), à l'échelle d'un bassin océanique la thermocline n'est pas horizontale etc. Nous supposons donc que l'on peut écrire la densité comme

$$\rho(x, y, z, t) = \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t) \quad (4.1)$$

Les phénomènes ondulatoires liés à la stratification se classent naturellement en deux groupes : les phénomènes hydrostatiques et ceux non hydrostatiques. Le nombre adimensionné associé est kH . Dans le cas hydrostatique, tout se passe comme si l'océan était un empilement de couches de densité croissantes, empilement discret ou continu selon le degré de réalisme. Ce cas généralise en quelque sorte le modèle shallow water avec cependant une nuance de taille : **les couches sont couplées dynamiquement entre elles** de sorte qu'il n'est pas possible de mettre en mouvement une couche s'en aussitôt mettre toutes les autres en mouvement. Le cas nonhydrostatique fait apparaître des ondes au comportement étonnant : les ondes internes. Leur côté exotique vient du caractère nonhydrostatique qui défie l'intuition. Nous avons en effet souvent le réflexe de penser que la pression est liée au poids de la colonne d'eau, ce qui n'est qu'un cas limite.

La plan de ce chapitre est donc le suivant. Nous étudierons d'abord comment apparaît le couplage entre les couches ce qui nous amènera à introduire la décomposition en modes baroclines qui permet de découpler le mouvement sur la

verticale. Nous passerons ensuite à l'étude des ondes internes, nous montrerons comment on peut retrouver les modes baroclines dans l'approximation $kH \ll 1$. Nous étudierons enfin la réflexion des ondes internes sur la topographie et en particulier sur les marges continentales.

4.2 Couplage entre les couches

Pour étudier le couplage entre les couches il suffit de raisonner sur un modèle à deux couches. La figure 4.1 présente les notations que nous avons volontairement choisies au plus proche de celles du modèle shallow water afin de bien montrer les similarités et les différences. Comme il y a deux couches, il y a deux fois plus

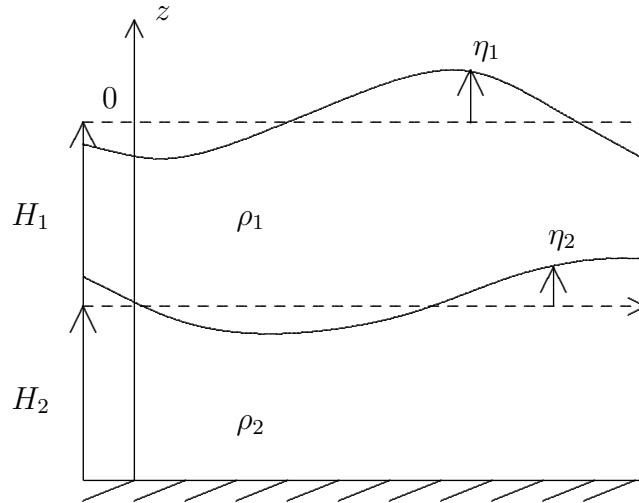


FIGURE 4.1 – Modèle à deux couches

de variables que pour le modèle shallow water et donc deux fois plus d'équations. Ces équations sont presque les mêmes à la différence des termes de couplage qui sont

1. la variation d'épaisseur de la couche 1 dépend en plus des termes habituels de la vitesse verticale de l'interface η_2 :

$$\partial_t h_1 = \partial_t(\eta_1 - \eta_2) = -\nabla \cdot (h_1 \mathbf{u}_1).$$

2. la pression (ou plus exactement l'anomalie de pression par rapport à l'état au repos) dans la couche 2 dépend en plus des termes habituels de l'élévation η_1 :

$$p_2 = p_1 + g(\rho_2 - \rho_1)\eta_2.$$

Notons $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_0$ où ρ_0 est la densité moyenne, faisons l'hypothèse de Boussinesq (qui consiste à ne retenir les variations de pression que dans le calcul de la pression), nous arrivons alors au système d'équation linéaire homogène pour les petites perturbations

$$\begin{pmatrix} -i\omega & -f & igk_x & 0 & 0 & 0 \\ +f & -i\omega & igk_y & 0 & 0 & 0 \\ iH_1k_x & iH_1k_y & -i\omega & 0 & 0 & +i\omega \\ 0 & 0 & \mathbf{ig}'\mathbf{k}_x & -i\omega & -f & igk_x \\ 0 & 0 & \mathbf{ig}'\mathbf{k}_x & +f & -i\omega & igk_y \\ 0 & 0 & 0 & iH_2k_x & iH_2k_y & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \eta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Le matrice du système se présente donc comme une matrice par blocs 2×2 . Les blocs diagonaux sont analogues à la matrice du modèle shallow water tandis que les blocs extradiagonaux (en gras dans (4.2)) sont les blocs de couplage entre couches.

Physiquement ces deux couplages signifient que :

1. les déformations de l'interface η_1 mettent en mouvement la couche 2
2. les étirements-compression de la couche 2 induisent un mouvement dans la couche 1.

La conclusion principale est qu'en présence de stratification il est impossible de mettre en mouvement une couche sans mettre l'autre couche elle aussi en mouvement. Le raisonnement se généralise à n couches et survit au passage à la limite d'une stratification continue.

L'idée donc pour décrire le mouvement en présence de stratification est de le décrire en termes de modes sur la verticale. Ces modes doivent avoir la propriété de découpler les équations, i.e. d'annuler les blocs extradiagonaux de la matrice (4.2). Ces modes sont ce qu'on appelle **les modes baroclines**.

4.3 Découplage par les modes baroclines

Nous introduirons ces modes sur le cas continument stratifié. Tout comme dans la section précédente nous conserverons l'hypothèse hydrostatique, qui n'a rien a voir avec le passage du discret au continu. Les équations du mouvement

sont alors

$$\begin{aligned}
\partial_t u &= -\partial_x p + f v \\
\partial_t v &= -\partial_y p - f u \\
0 &= -\partial_z p + b \\
\partial_t b &= -N^2 w \\
\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w &= 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

où nous avons introduit la flottabilité (buoyancy en anglais) b définie par

$$b = -g \frac{\rho}{\rho_0} \tag{4.4}$$

et nous avons linéarisé l'équation de conservation de la masse ce qui conduit au terme en wN^2 , N étant la fréquence de flottabilité (ou fréquence de Brunt-Vaisala).

Nous supposons que la stratification n'est pas forcément uniforme, i.e $N(z)$. Les termes de couplage entre couches sont à présent les deux termes impliquant des dérivées verticales ∂_z et on retrouve les mêmes ingrédients physiques : couplage par la pression (qui intègre l'information depuis la surface), couplage par les étirements-dilatation dans l'équation d'incompressibilité.

L'objectif est de découpler ces équations sur la verticale, c'est à dire de trouver des fonctions de la forme $\hat{\phi}(z)\phi(x, y, t)$ tels que le système ne fasse plus intervenir de dérivée verticale. La technique consiste à écrire une équation pour la pression

$$\partial_t [(\partial_{tt}^2 + f^2)\partial_z(N^{-2}\partial_z p) + \nabla^2 p] = 0. \tag{4.5}$$

En introduisant une forme d'onde plane $p = p(z)e^{i(kx - \omega t)}$ on trouve que $p(z)$ obéit au problème de Sturm-Liouville suivant :

$p(z)$ doit être de solution de l'équation

$$\partial_z(N^{-2}\partial_z p) + \frac{1}{c_n^2}p = 0 \tag{4.6}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
\partial_z p &= 0 & \text{en } z = -H \\
\partial_z p + pN^2/g &= 0 & \text{en } z = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Pour $N(z)$ donné le problème admet une infinité $\phi_n(z)$ de modes orthogonaux au sens

$$\int_{-H}^0 \phi_n \phi_m dz = \delta_{n,m} \tag{4.8}$$

La résolution dans le cas $N(z) = \text{cste}$ conduit à

$$p(z) = p_0 \cos\left(\frac{N}{c_n}(z + H)\right) \quad (4.9)$$

et la relation de dispersion

$$\tan\left(\frac{HN}{c_n}\right) = \frac{Nc_n}{g} \quad (4.10)$$

avec

$$\omega(\omega^2 - f^2 - c_n^2 K^2) = 0 \quad (4.11)$$

Une résolution graphique de (4.10) donne

mode barotrope	$c_0^2 \sim gH$
modes baroclines	$c_n \sim NH/(n\pi), n = 1, 2, \dots$

Le résultat est donc que le système (4.3) admet une infinité de relation de dispersion, toutes de la forme (4.11) à condition de considérer le mouvement non pas couche par couche (i.e. selon z) mais mode par mode.

Le mode barotrope est le mode provenant du modèle shallow water, le premier mode barocline est le mode qui apparaît dans le modèle à deux couches, le 2^{ième} mode barocline celui qui apparaît dans le modèle à trois couches etc.

La figure 4.2 illustre la structure des premiers modes pour une stratification non uniforme et plutôt typique de la présence d'une thermocline (zone de fort N).

Tout les résultats du chapitre 3 sont transposables au cas continument stratifié à condition de remplacer la notion de couche par la notion de mode. En particulier l'ajustement géostrophique en milieu stratifié présente les mêmes caractéristiques qu'en shallow water mais pour une déformation initiale de longueur L chaque mode aura son rayon de déformation et donc son nombre de Burger et par conséquent son propre régime. Prenons par exemple une perturbation de 100 km. Pour le mode barotrope on a $\text{Bu} \gg 1$ donc l'ajustement se fait via le rayonnement d'ondes $\omega = \sqrt{gH}k$ en revanche pour les modes baroclines on a $\text{Bu} < 1$ voire $\text{Bu} \ll 1$. Pour les premiers modes baroclines les ondes émises se propagent lentement, pour les modes élevés elles deviennent des oscillations inertielles.

De même pour les ondes de Rossby, chaque mode barocline possède une onde de Rossby complètement caractérisée par son Bu . Une anomalie de VP dans une couche (ou à une profondeur donnée) possède une contribution sur chacun des modes baroclines et donc excite autant d'ondes de Rossby.

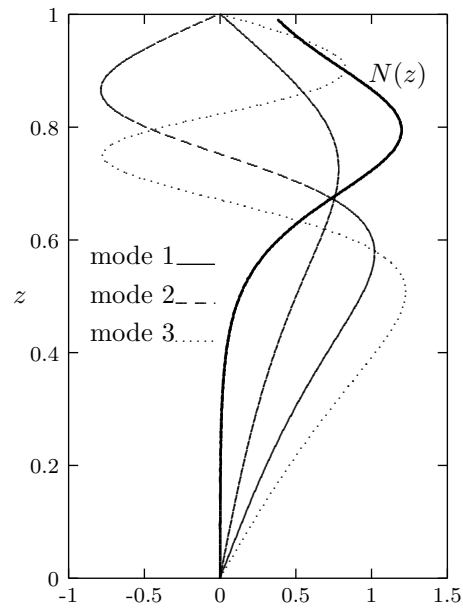


FIGURE 4.2 – Modes baroclines pour une stratification non uniforme. Les oscillations sont concentrées dans la zone de maximum de fréquence de flottabilité.

Le cas continum stratifié est donc clairement plus complexe que le cas une couche mais tout se simplifie si l'on prend bien soin de projeter le mouvement selon les modes baroclines.

4.4 Ondes internes

Levons à présent l'hypothèse hydrostatique ($kH \ll 1$), nous changeons alors de régime pour nous intéresser à des phénomènes de plus petite échelle. Cependant le kH étant quelconque il sera toujours possible après coup de le rendre très petit, nous devrions alors retrouver les résultats précédents. Nous verrons que c'est effectivement le cas : les modes baroclines peuvent s'interpréter comme une superposition d'ondes internes.

4.4.1 Dérivation

Les équations de départ sont les mêmes que pour les modes baroclines à la différence que l'on retient le terme d'accélération verticale $\partial_t w$

$$\begin{aligned}\partial_t u &= -\partial_x p + fv \\ \partial_t v &= -\partial_y p - fu \\ \partial_t w &= -\partial_z p + b \\ \partial_t b &= -N^2 w \\ \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w &= 0\end{aligned}\tag{4.12}$$

En supposant à présent N constant on obtient facilement l'équation d'ondes

$$(f^2 + \partial_t^2)\partial_z p + (N^2 + \partial_t^2)\nabla^2 p = 0\tag{4.13}$$

puis la relation de dispersion

$$\frac{\omega^2 - N^2}{f^2 - \omega^2} = \frac{k_z^2}{k^2}\tag{4.14}$$

que nous préférons retenir sous la forme

$$\omega^2 = N^2 \cos^2 \theta + f^2 \sin^2 \theta\tag{4.15}$$

avec k le module de la composante horizontale de \mathbf{k} et θ l'angle que fait le vecteur d'onde \mathbf{k} avec l'horizontale (Figure 4.3).

4.4.2 Propriétés

Parmi les nombreuses propriétés citons

$$-f \leq \omega \leq N$$

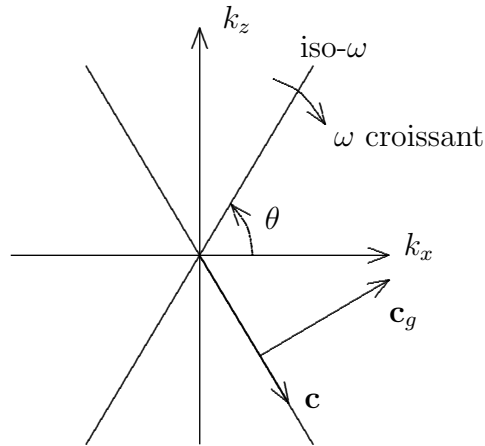


FIGURE 4.3 – Cône de dispersion des ondes internes (en milieu non tournant). Les composantes horizontales de \mathbf{c} et \mathbf{c}_g sont de même signe, les composantes verticales sont de signes contraires.

- les ondes internes sont anisotropes (cône de dispersion, cf. figure 4.3)
- la vitesse de groupe est perpendiculaire à la vitesse de phase (il est facile de le voir à partir du cône : \mathbf{c} est porté par le cône, le cône étant une surface équi- ω , \mathbf{c}_g lui est perpendiculaire. L'énergie se propage donc sous un angle θ par rapport à la verticale)
- les ondes sont transversales i.e. $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$ (car $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$)

En général dans l'océan on a $f \ll N$ mais ce n'est pas toujours le cas : les couches profondes sont très faiblement stratifiées et la couche mélangée de surface ne l'est pas du tout ...

4.4.3 Régimes asymptotiques

Il y en a deux :

1. $\theta \rightarrow 0$ on a alors

$$\omega = N \quad (4.16)$$

on retrouve les oscillations verticales de la stratification. La propagation de l'énergie est alors purement verticale.

2. $\theta \rightarrow \pi/2$ on peut alors développer la relation de dispersion par rapport à l'angle complémentaire $\theta^* = \pi/2 - \theta$, soit l'angle que fait la vitesse de groupe avec l'horizontale et on a

$$\omega^2 = f^2 + N^2 \frac{k^2}{k_z^2} \quad (4.17)$$

En posant $R = N/fk_z$ on retrouve la relation de dispersion des ondes baroclines de gravito-inertie.

4.4.4 Décomposition d'un mode barocline en ondes internes

Les modes baroclines sont des ondes internes dont la longueur d'onde est telle qu'il n'y a plus de propagation selon la verticale : elles sentent le fond et la surface et sont donc obligés de se déplacer horizontalement. Elles sont piégées dans le guide d'ondes océanique. Cette décomposition s'avère fructueuse pour

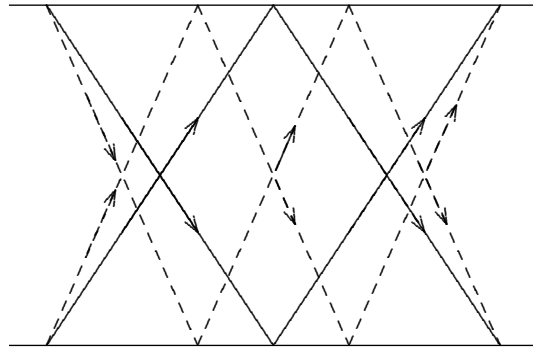


FIGURE 4.4 – Trajet des rayons correspondant aux premier (continu) et second (tirets) modes baroclines.

déterminer comment une onde barocline se réfléchit sur une pente.

4.4.5 Réflexion des ondes internes

La réflexion des ondes internes est un phénomène suprenant au premier abord mais qui se rationalise très bien. Sur des parois horizontales ou verticales la réflexion se passe apparemment comme tout autre phénomène ondulatoire : l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion $\alpha_i = \alpha_r$. Sur des parois inclinées, comme un topographie par exemple, la relation est différente. En effet au cours de la réflexion on doit avoir $\omega_i = \omega_r$ du fait de la stationnarité du milieu, c'est donc l'angle que fait l'onde avec la verticale qui est conservé ! La figure 4.5 illustre le phénomène sur une pente faisant un angle α avec l'horizontale.

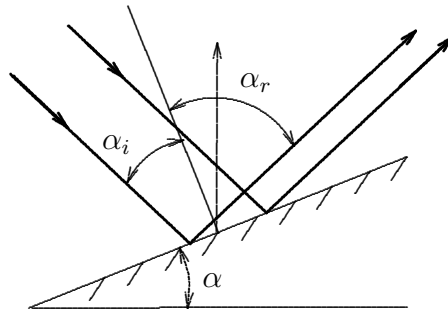


FIGURE 4.5 – Réflexion d'une onde interne sur une pente faisant un angle α avec l'horizontale. L'énergie du faisceau incident est concentrée dans un faisceau plus étroit, l'amplitude de l'onde réfléchie est donc plus grande que l'amplitude de l'onde incidente.

Lors de la réflexion la largeur du faisceau est modifiée. Sur l'exemple de la figure la largeur diminue donc la densité d'énergie augmente. Tout comme dans tout processus de réflexion \mathbf{k} est aussi modifié selon sa composante perpendiculaire à l'interface (cf. théorie des rayons § 1.7) tandis que la composante parallèle est conservée. Pour déterminer \mathbf{k}_r on utilise la relation suivante

$$\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r \sim \mathbf{n} \quad (4.18)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal et le fait que \mathbf{k}_i et \mathbf{k}_r sont perpendiculaires aux rayons (Figure 4.6).

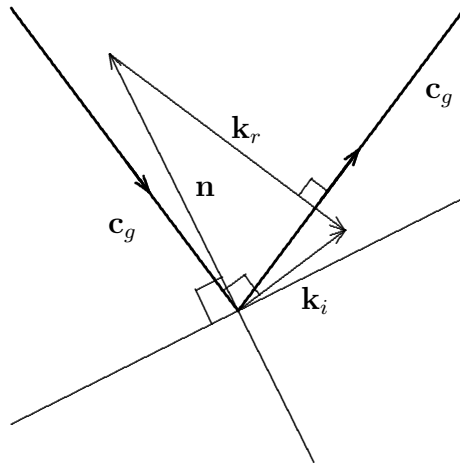


FIGURE 4.6 – Détermination graphique de \mathbf{k}_r à la réflexion. Dans cette configuration la longueur d’onde diminue lors de la réflexion.

La réflexion d’un mode barocline sur une pente conduit à l’apparition d’un rayon comme l’indique la figure ci-dessous.

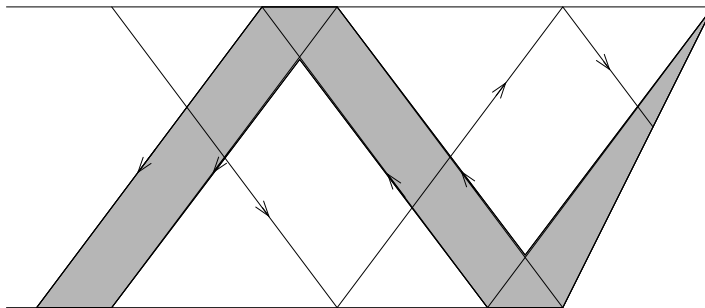


FIGURE 4.7 – Réflexion d’un premier mode barocline sur une pente, l’onde réfléchie se concentre dans un rayon.

Dans tous les phénomènes de réflexion l’angle α joue un rôle important, le cas $\alpha = \theta_i$ est ce que l’on appelle l’incidence critique, le faisceau réfléchi est alors infiniment mince ce qui conduit à une densité d’énergie infinie. La situation n’est pas physique il se produit en fait une instabilité qui conduit au déferlement de l’onde interne (instabilité de Kelvin-Helmholtz) ce qui a pour effet de créer du **mélange diapycnal**.