Université de Bretagne Occidentale
Département de Mathématiques
MAITRISE DE MATHEMATIQUES

ALGEBRE

Examen terminal, 12 janvier 2004, 14h00–18h00

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Soit A an anneau intègre et soit M un A-module.

a. Donner la définition du rang de M.

b. Montrer que le rang de M est fini lorsque M est de type fini.

Exercice 1. Soit G un groupe de cardinal 2004. Montrer que G n'est pas simple.

Exercice 2. Montrer qu'il existe un groupe non commutatif de cardinal 203.

Exercice 3. Soit M le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z}^3$ engendré par

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que l'image $\overline{M}$ de M dans le quotient $\mathbb{Z}^3/2\mathbb{Z}^3$ est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace de dimension 1.

b. Montrer que le quotient $\mathbb{Z}^3/M$ n'est pas un groupe cyclique.

Exercice 4. Soit A un sous-anneau d'un corps K. Montrer que A est un corps lorsque K est entier sur A. (Indication : si $a \in A$ est non nul, $a^{-1} \in K$ est entier sur A.)

Exercice 5. a. Déterminer un polynôme unitaire irréductible $P \in \mathbb{F}_3[X]$ de degré 2.

b. Déterminer un générateur y du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_9^\star$.

c. Déterminer le polynôme minimal de y sur $\mathbb{F}_3$.

Exercice 6. Soient p et n des nombres premiers. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{P}$ les deux ensembles définis par :

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{F}_{p^n} \mid x \notin \mathbb{F}_p\}$$

et

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{F}_p[X] \mid P \text{ est irréductible et unitaire, et } \deg(P) = n\}.$$

T. S. V. P.

Soit

$$\mu\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{P}$$

l'application qui associe à $x \in \mathcal{X}$ son polynôme minimal sur $\mathbb{F}_p$.

a. Montrer qu'on a bien $\mu(x) \in \mathcal{P}$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

b. Montrer que μ est surjectif.

c. Soient $x, y \in \mathcal{X}$. Montrer que $\mu(x) = \mu(y)$ si et seulement s'il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$ tel que $\sigma(x) = y$.

d. Montrer que le nombre de polynômes unitaires irréductibles dans $\mathbb{F}_p[X]$ de degré n est égal à

$$\frac{p^n - p}{n}.$$

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme irréductible $X^4 - 2X^2 + 5$. Soit L le corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$.

a. Montrer que L contient $Q(i)$ comme sous-corps.

b. Montrer que $[L : \mathbb{Q}]$ est un diviseur de 8.

c. Soit σ la restriction à L de la conjugation complexe. Montrer que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ est le produit semi-direct de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(i))$ et $\{\mathrm{id}, \sigma\}$.

d. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.

e. Soit $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $[\mathbb{Q}(\sqrt{\omega}) : \mathbb{Q}] = 4$.

f. Soit $L' = L \cap \mathbb{R}$. Montrer que $L' = \mathbb{Q}(\sqrt{\omega})$.

g. Montrer que $[L : \mathbb{Q}] = 8$.

h. Montrer que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(i))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

i. Montrer que le groupe de Galois de P est isomorphe à D_4.

Barème indicatif sur 100 pts :

Question de cours	8 pts
Exercice 1	8 pts
Exercice 2	4 pts
Exercice 3	12 pts
Exercice 4	6 pts
Exercice 5	12 pts
Exercice 6	16 pts
Exercice 7	34 pts

T. S. V. P.