Institut Mathématique, Université de Rennes 1
Maîtrise de Mathématiques

ALGEBRE COMMUTATIVE

Examen Terminal, 2ème session, le 4 septembre 1997, 14h–17h

Aucun document n'est autorisé. Barème au verso.

1. Vrai ou faux (justifier les réponses):

a. L'anneau des polynômes $A[X]$ à coefficients dans A est principal lorsque l'anneau A est principal.
b. Soit A un anneau et $S \subseteq A$ une partie multiplicative. Alors, le morphisme de localisation $\iota\colon A \to S^{-1}A$ est injectif.
c. Le groupe $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ admet une structure de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-module.
d. Le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ admet une structure de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$-module.

2. Soit A un anneau local fini. Soit m son idéal maximal. Montrer que

a. A n'a qu'un seul idéal premier;
b. un élément de A est soit inversible, soit nilpotent.

3. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 4X + 5$. Soit $I \subseteq \mathbb{Z}[X]$ l'idéal engendré par 2 et P. Soit A l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/I$. Montrer que

a. A est fini;
b. A n'est pas réduit;
c. A est un anneau local.

On appellera m l'idéal maximal de A. Déterminer

d. le cardinal de A, ainsi que celui du quotient A/m;
e. le cardinal m;
f. le nombre d'inversibles de A;
g. le nombre de nilpotents de A.

4. Soit A un anneau et soit

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de A-modules.

a. Soit Q un A-module et $h\colon Q \to P$ un morphisme de A-modules. Soit $N \times_P Q$ le produit fibré de N et Q sur P. Montrer qu'il existe une suite exacte courte de A-modules

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \times_P Q \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

T.S.V.P.

b. Soit Q un A-module et $h\colon M \to Q$ un morphisme de A-modules. Soit $Q \oplus_M N$ la somme amalgamée de Q et N sur M. Montrer qu'il existe une suite exacte courte de A-modules

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow Q \oplus_M N \longrightarrow P \longrightarrow 0.$$

5. Soit A l'anneau quotient $\mathbb{Q}[X,Y]/(Y^2 - X^2)$. Montrer que

a. A est isomorphe au sous-anneau B de l'anneau produit $\mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X]$ défini par $B = \{(P,Q) \mid P(0) = Q(0)\}$;

b. la localisation A_X de A par X est isomorphe à l'anneau produit $\mathbb{Q}[X]_X \times \mathbb{Q}[X]_X$.

Barème indicatif sur 50 points :

1 **8 pts**				**2** **8 pts**		**3** **12 pts**							**4** **12 pts**		**5** **10 pts**	
a	b	c	d	a	b	a	b	c	d	e	f	g	a	b	a	b
2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	2	1	1	6	6	6	4

T.S.V.P.