

Université de Bretagne Occidentale, Département de Mathématiques  
MASTER 1, MATHÉMATIQUES

Groupes et anneaux

Examen terminal, 15 janvier 2013, 9h00–12h00

Documents et calculatrices sont interdits.

**Question de cours.** Démontrer l'énoncé suivant. Un anneau  $A$  est noetherien si et seulement si chaque chaîne croissante d'idéaux de  $A$

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

est stationnaire, c-à-d, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $I_{N+k} = I_N$  quel que soit  $k \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 1.** Soit  $(M, \cdot)$  un monoïde. Soit  $x \in M$ . On dit que  $x$  est un élément *régulier* de  $M$  si  $x \cdot y = x \cdot z$  implique que  $y = z$ , quels que soient  $y, z \in M$ . Notons encore  $m_x$  l'application de  $M$  dans lui-même de multiplication à gauche par  $x$ , i.e.,  $m_x(y) = xy$ .

- Montrer que  $x$  est régulier si et seulement si l'application  $m_x$  est injective.
- Montrer que  $x$  est inversible dans  $M$  si et seulement si  $m_x$  est bijective.

On dit qu'un monoïde  $M$  est *régulier* si tous ses éléments sont réguliers.

- Montrer qu'un monoïde régulier fini est un groupe.
- En déduire qu'un anneau intègre fini est un corps.

Soit  $f$  un morphisme de monoïdes de  $M$  dans un groupe  $G$ .

- Montrer que si  $f$  est injectif alors  $M$  est régulier.
- Est-ce que la réciproque est vraie?

**Exercice 2.** Soit  $(A, +, \cdot)$  un anneau, non forcément unitaire, ni commutatif.

- Montrer que  $0 \cdot a = 0$  quel que soit  $a \in A$ .
- Montrer que  $A = \{0\}$  si  $A$  est un groupe pour la loi de composition interne  $\cdot$ .

**Exercice 3.** Montrer que tout groupe de cardinal 2013 est cyclique.

**Exercice 4.** Soit  $\mathbb{F}_3$  le corps à 3 éléments. Soit  $G$  le groupe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$  des matrices  $2 \times 2$  à valeurs dans  $\mathbb{F}_3$  de déterminant 1. Soit  $I \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$  la matrice identité et soient  $J, U \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$  définies par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer le nombre de bases que possède l'espace vectoriel  $\mathbb{F}_3^2$ .
- En déduire le cardinal de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ .
- En déduire le cardinal de  $G$ .
- Déterminer l'ordre de  $J$ .
- Déterminer l'ordre de  $U$ .
- Déterminer le centre  $Z$  de  $G$ .

Faisons agir  $G$  sur lui-même par conjugaison, dans le but de déterminer les classes de conjugaison de  $G$ .

- Déterminer le stabilisateur  $G_U$  de  $U$ .
- Quel est le cardinal de l'orbite  $O(U)$  de  $U$ ?

- i. Montrer que  $U^2 \notin O(U)$ .
- j. Combien d'éléments d'ordre 3 contient-il au moins,  $G$ ?
- k. Montrer que si  $A \in G$  est d'ordre 3,  $-A$  est un élément de  $G$  d'ordre 6.
- l. Combien d'éléments d'ordre 6 contient-il au moins,  $G$ ?
- m. Montrer que le complémentaire du sous-ensemble des éléments de  $G$  d'ordre 3 ou 6 est un 2-sylow de  $G$ .
- n. En déduire le nombre d'éléments de  $G$  d'ordre 3 et 6.
- o. Déterminer le stabilisateur  $G_J$  de  $J$ .
- p. Quel est le cardinal de l'orbite  $O(J)$  de  $J$ ?
- q. Déterminer le nombre d'éléments d'ordre 4 de  $G$ .
- r. Combien de classes de conjugaison  $G$  possède-t-il?
- s. Préciser le cardinal de chaque classe de conjugaison de  $G$ .
- t. Déterminer le nombre de sous-groupes distingués de  $G$ .

**Exercice 5.** Soit  $a \in M_{2 \times 3}(\mathbb{Z})$  définie par

$$a = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 12 & 8 & 20 \end{pmatrix}.$$

Soit  $C$  le sous-groupe de  $\mathbb{Z}^2$  engendré par les colonnes de  $a$ , et  $L$  le sous-groupe de  $\mathbb{Z}^3$  engendré par les lignes de  $a$ .

- a. Déterminer des matrices  $u \in M_2(\mathbb{Z})$  et  $v \in M_3(\mathbb{Z})$ , produits de matrices élémentaires, et des entiers relatifs  $d, e$ , avec  $d|e$ , tels que  $uav = \text{diag}(d, e)$ .
- b. Déterminer le rang et les facteurs invariants du quotient  $\mathbb{Z}^2/C$ . Le quotient  $\mathbb{Z}^2/C$  est-il cyclique?
- c. Même questions pour le quotient  $\mathbb{Z}^3/L$ .

**Exercice 6.** Soit  $K$  un corps. Soit  $I$  l'idéal de  $K[X, Y, Z]$  engendré par les 3 polynômes  $X, Y, Z$ . Le but de cet exercice est de montrer que l'idéal  $I$  ne peut être engendré par 2 éléments.

- a. Montrer de deux manières différentes que  $I$  est un idéal maximal de  $K[X, Y, Z]$ .

Lorsque  $J$  est un idéal de  $K[X, Y, Z]$ , on considère  $J$  comme  $K$ -espace vectoriel par restriction de la loi externe  $K[X, Y, Z] \times J \rightarrow J$  à  $K \times J$ , où  $K$  est considéré comme sous-anneau des polynômes constants de  $K[X, Y, Z]$ .

- b. Déterminer une base du  $K$ -espace vectoriel  $I$ .
- c. Déterminer une base du  $K$ -espace vectoriel  $I^2$ .
- d. Déterminer une base du  $K$ -espace vectoriel quotient  $I/I^2$ .
- e. Quelle est la dimension du  $K$ -espace vectoriel  $I/I^2$ ?
- f. Soient  $G \in K[X, Y, Z]$  et  $F \in I$ . Montrer que  $\overline{GF} = G(0) \cdot \overline{F}$  dans  $I/I^2$ .

Nous montrons par l'absurde que  $I$  ne peut être engendré par 2 éléments. Supposons donc dans la suite qu'il existe deux polynômes  $F_1, F_2 \in I$  tels que  $I = (F_1, F_2)$ .

- h. Montrer que la famille  $\overline{F_1}, \overline{F_2}$  est génératrice du  $K$ -espace vectoriel  $I/I^2$ .
- i. Conclure.