

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
MASTER 1, MATHÉMATIQUES

ALGÈBRE

Examen terminal, 3 janvier 2005, 13h00–17h00

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Soit A un anneau noethérien. Montrer que $A[X]$ est noethérien. (On pourra admettre qu'un anneau est noethérien si et seulement si toute chaîne croissante de ses idéaux est stationnaire.)

Exercice 1. Soit G un groupe non commutatif de cardinal 2005.

- Déterminer le nombre de 5-sous-groupes de Sylow de G .
- Déterminer le nombre d'éléments de G d'ordre 5.

Exercice 2. Soient N et H des groupes, et $\alpha: H \rightarrow \text{Aut}(N)$ un morphisme de groupes. Soit H' un sous-groupe distingué de H , contenu dans le noyau de α . Soit $\bar{\alpha}: H/H' \rightarrow \text{Aut}(N)$ le morphisme induit.

- Montrer que $\{1\} \times H'$ est un sous-groupe distingué du produit semi-direct $N \rtimes_{\alpha} H$.
- Montrer que le quotient $(N \rtimes_{\alpha} H)/(\{1\} \times H')$ est isomorphe au produit semi-direct $N \rtimes_{\bar{\alpha}} (H/H')$.

Exercice 3. Soit A un anneau intègre, et soient M et N deux A -modules de type fini. Supposons qu'il existe un morphisme de A -modules injectif $f: M \rightarrow N$. Montrer que $\text{rang}(M) \leq \text{rang}(N)$.

Exercice 4. Soit $f: \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ le morphisme de \mathbb{Z} -modules dont la matrice dans les bases canoniques est la matrice

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 16 \\ 28 & 32 & 50 \end{pmatrix}.$$

Déterminer des entiers relatifs d, e , avec $d|e$, tels que le conoyau de f est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

- Montrer que $[K : \mathbb{Q}] = 4$.
- Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = K$.
- Déterminer le polynôme minimal P de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur \mathbb{Q} .

T. S. V. P.

- d. Montrer que l'extension K/\mathbb{Q} est galoisienne et que son groupe de Galois est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- e. Soit α la racine carrée positive de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Montrer que $\alpha \notin K$.
- f. Déterminer le polynôme minimal Q de α sur \mathbb{Q} .
- g. Soit $L \subseteq \mathbb{C}$ le corps de décomposition de Q sur \mathbb{Q} . Montrer que $L = \mathbb{Q}(\alpha, i)$ et que $[L : \mathbb{Q}] = 16$.
- h. Montrer que le groupe de Galois de $L/\mathbb{Q}(i)$ est isomorphe au groupe diédral D_4 .
- i. Montrer que le groupe de Galois de L/\mathbb{Q} est isomorphe à un produit semi-direct non trivial $D_4 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Barème indicatif s r 100 points :

Question de cours	20 pts
Exercice 1	15 pts
Exercice 2	12 pts
Exercice 3	8 pts
Exercice 4	15 pts
Exercice 5	30 pts

T. S. V. P.