UFR Mathématiques, Université de Rennes 1
Licence de Mathématiques

ALGEBRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Examen terminal, 2ème session, 3 septembre 2001, 8h-11h

Aucun document n'est autorisé. On pourra utiliser tous les résultats du cours, du polycopié et des TD à condition d'y référer. Barème indicatif : **1** : 1 point, **2** : 2 points, **3** : 3 points, **4** : 3 points, **5** : 3 points, **6** : 4 points, **7** : 4 points.

1. Soit G un groupe ayant la propriété suivante. Quels que soient $a, b \in G$, $(ab)^3 = a^3b^3$ et $(ab)^5 = a^5b^5$. Montrer que G est abélien.

2. Soit G un groupe. Un élément $y \in G$ est un *cube* de G s'il existe $x \in G$ tel que $y = x^3$. Soit H le sous-groupe de G engendré par les cubes de G.

a. Montrer que H est distingué dans G.
b. Donner un exemple d'un groupe G tel que le quotient G/H n'est pas abélien, où H est le sous-groupe de G engendré par les cubes de G.

3. Déterminer le nombre de groupes d'ordre 1225 à isomorphisme près.

4. Soit M_{11} le onzième groupe de Mathieu. On rappelle que M_{11} est simple et que son ordre est égal à $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11$. Montrer que M_{11} contient au moins 11 2-sylow sous-groupes.

5. a. Soit G un groupe et soient H et H' des sous-groupes finis de G. Soient s, s' et s'' l'ordre de H, H' et $H \cap H'$ respectivement. Déterminer le cardinal du sous-ensemble HH' de G en fonction de s, s' et s''.
b. Donner un exemple d'un groupe G et de sous-groupes H et H' tels que le sous-ensemble HH' n'est pas un sous-groupe de G.

6. Soit G un groupe fini. Soit p un nombre premier.

a. Montrer que l'intersection I de tous les p-sylow sous-groupes de G est un sous-groupe distingué de G.
b. Montrer que l'intersection de tous les p-sylow sous-groupes du quotient G/I est triviale.

7. Soient G, H, G', H' des groupes et soient $\alpha \colon H \to \mathrm{Aut}(G)$ et $\alpha' \colon H' \to \mathrm{Aut}(G')$ des morphismes. Soient $f \colon G \to G'$ et $k \colon H \to H'$ des morphismes. On désignera par φ l'application de $G \times H$ dans $G' \times H'$ définie par $\varphi(g, h) = (f(g), k(h))$ pour tout $(g, h) \in G \times H$.

a. Montrer que φ est un morphisme de $G \rtimes_\alpha H$ dans $G' \rtimes_{\alpha'} H'$ si et seulement si $f(\alpha(h)(g)) = \alpha'(k(h))(f(g))$ quels que soient $g \in G$ et $h \in H$.

T. S. V. P.

Dans la suite de cet exercice on suppose que φ est un morphisme de $G \rtimes_\alpha H$ dans $G' \rtimes_{\alpha'} H'$.

b. Montrer que le noyau $\ker(\varphi)$ de φ est un produit semi-direct de $\ker(f)$ et $\ker(k)$.

c. Montrer que $\ker(\varphi)$ est le produit direct de $\ker(f)$ et $\ker(k)$ lorsque $\ker(k) \subseteq \ker(\alpha)$.

d. Montrer que l'image $\mathrm{im}(\varphi)$ de φ est un produit semi-direct de $\mathrm{im}(f)$ et $\mathrm{im}(k)$.

e. Montrer que $\mathrm{im}(\varphi)$ est le produit direct de $\mathrm{im}(f)$ et $\mathrm{im}(k)$ lorsque $\mathrm{im}(k) \subseteq \ker(\alpha')$.