UFR Mathématiques, Université de Rennes 1
Licence de Mathématiques

ALGEBRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Corrigé de l'examen terminal du 30 mai 2001

1. a. Soit S l'ensemble des carrés de G. Comme le conjugué d'un carré de G est de nouveau un carré de G, $gSg^{-1} \subseteq S$ pour tout $g \in G$. D'où

$$gHg^{-1} = g\langle S\rangle g^{-1} = \langle gSg^{-1}\rangle \subseteq \langle S\rangle = H$$

quel que soit $g \in G$. Par conséquent, H est distingué dans G **(1 pt)**.

b. Tout élément $\overline{x}$ de G/H satisfait $\overline{x}^2 = \overline{e}$. D'après l'exercice I.2 du TD, G/H est abélien **(0,5 pt)**.

c. **1ère méthode:** D'après l'exercice 9.8.9 du polycopié, H contient le sous-groupe des commutateurs de G. En particulier, $[a, b] \in H$. Comme un mot sur les carrés de G est un produit de carrés de G, tout élément de H est un produit de carrés de G. Par conséquent, $[a, b]$ est un produit de carrés de G **(0,5 pt)**.
2ème méthode: $[a, b] = aba^{-1}b^{-1} = a^2(a^{-1}b)^2(b^{-1})^2$, i.e. $[a, b]$ est un produit de carrés de G **(0,5 pt)**.

2. Soit G un groupe d'ordre 2001. La décomposition en facteurs premiers de 2001 est $3 \times 23 \times 29$. D'après Sylow, G ne contient qu'un seul 29-sylow H ainsi qu'un seul 23-sylow K **(0,5 pt)**. En particulier, H et K sont distingués dans G **(0,5 pt)**. Il s'ensuit que HK est un sous-groupe distingué de G **(0,5 pt)**. Le groupe HK est d'ordre $667 = 23 \times 29$. D'après l'exercice III.47 du TD, HK est isomorp e à $\mathbb{Z}/667\mathbb{Z}$ **(0,5 pt)**. Le groupe quotient G/HK est de cardinal 3. Il est donc isomorp e à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Il existe donc une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/667\mathbb{Z} \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow 1 \quad \textbf{(0,5 pt)}.$$

Comme G contient au moins un 3-sylow, la suite est scindée, i.e., G est isomorp e au produit semi-direct $\mathbb{Z}/667\mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ où

$$\alpha \colon \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/667\mathbb{Z})$$

est un morp isme **(0,5 pt)**. Comme $\mathbb{Z}/667\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/23\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/667\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/23\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^\star \cong \mathbb{Z}/22\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/28\mathbb{Z} \quad \textbf{(0,5+0,5 pt)}.$$

Comme 22 et 28 ne sont pas divisibles par 3, tout morp isme de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/22\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ est trivial. En particulier, le morp isme α est trivial

(0,5 pt). Par conséquent, G est isomorp e au groupe produit $\mathbb{Z}/667\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2001\mathbb{Z}$. Il s'ensuit qu'il n'y a qu'un seul groupe d'ordre 2001 à isomorp isme près **(0,5 pt)**.

3. Tout d'abord, si E est vide, s' divise bien s **(0,5 pt)**. Supposons donc que E est non vide. Soit $x \in E$. Comme l'action de G sur E est transitive, l'orbite Gx de x est égale à E tout entier. D'après la formule des orbites,

$$s = |Gx| = \frac{|G|}{|G_x|} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Soit $y = \varphi(x)$. On a de même,

$$s' = |Gy| = \frac{|G|}{|G_y|}.$$

Par conséquent,

$$s' \cdot \frac{|G_y|}{|G_x|} = s.$$

Pour montrer que s' divise s il suffit donc de montrer que $|G_x|$ divise $|G_y|$ **(0,5 pt)**. Pour cela, il suffit de montrer que G_x est un sous-groupe de G_y **(0,5 pt)**. Soit donc $g \in G_x$. Or $g \cdot y = g \cdot \varphi(x) = \varphi(g \cdot x) = \varphi(x) = y$. D'où $g \in G_y$ **(0,5 pt)**.

4. a. Comme l'ordre de $f(S)$ divise l'ordre de S et comme S est un p-groupe, $f(S)$ est un p-groupe **(1 pt)**. Il reste à montrer que l'indice de $f(S)$ dans G' n'est pas divisible par p. Pour montrer cela, on voit essentiellement deux mét odes:

1ère méthode: Faire agir G à gauc e sur lui-même par translations. Cette action induit une action de G sur l'ensemble quotient G/S. Comme G agit transitivement sur G, l'action de G sur G/S est également transitive. De même, G' agit transitivement par translations sur $G'/f(S)$. Cette dernière action induit, via f, une action de G sur $G'/f(S)$. Comme f est surjectif, G agit transitivement sur $G'/f(S)$. De plus, f induit une application $\varphi\colon G/S \to G'/f(S')$ vérifiant la condition du 3. Par conséquent, $|G'/f(S)|$ divise $|G/S|$. Comme S est un p-sylow, p ne divise pas $|G/S|$. D'où p ne divise pas $|G'/f(S)|$, i.e., l'indice de $f(S)$ dans G' est premier avec p et $f(S)$ est un p-sylow dans G' **(1 pt)**.

2ème méthode: Soit K le noyau de f. D'après Proposition 10.2 du polycopié, $f^{-1}(f(S)) = KS$. De plus, on a une bijection entre les ensembles quotients G/KS et $G'/f(S)$. L'indice de KS dans G divise l'indice de S dans G. Ce dernier n'est pas divisible par p, donc il en est de même pour le premier. Par conséquent, l'indice de $f(S)$ dans G' n'est pas divisible par p **(1 pt)**.

b. Soient E et E' l'ensemble des p-sylows de G et G' respectivement. Faire agir G et G' sur E et E' respectivement par conjugaison **(0,5 pt)**. On obtient une action induite de G sur E' via f. Soit $\varphi\colon E \to E'$ l'application définie par $\varphi(S) = f(S)$. D'après le a, φ est bien une application de E dans E' **(0,5 pt)**. De plus, $\varphi(g \cdot S) = g \cdot \varphi(S)$ quels que soient $S \in E$ et $g \in G$. D'après Sylow, G et G' agissent transitivement sur E et E' **(0,5 pt)**. Comme f est surjectif, l'action de G sur E' est également transitive. D'après le 3, s' divise s **(0,5 pt)**.

5. a. Supposons que $G' \times H'$ est un sous-groupe de $G \rtimes_\alpha H$. En particulier, $G' \times H'$ est stable pour la loi de composition de $G \rtimes_\alpha H$. D'où $(e,y)(x,e) = (\alpha(y)(x), y)$ § $G' \times H'$ quels que soient $x \in G'$ et $y \in H'$, i.e., $\alpha(y)(x) \in G'$ quels que soient $x \in G'$ et $y \in H'$ **(0,5 pt)**.

Réciproquement, supposons que $\alpha(y)(x) \in G'$ quels que soient $x \in G'$ et $y \in H'$. Montrons que $G' \times H'$ est un sous-groupe de $G \rtimes_\alpha H$. Tout d'abord, (e,e) appartient bien à $G' \times H'$ car G' et H' sont des sous-groupes. Ensuite, soit $(x,y) \in G' \times H'$. Son symétrique dans $G \rtimes_\alpha H$ est égal à $(\alpha(y^{-1})(x^{-1}), y^{-1})$. Comme G' et H' sont des sous-groupes, $x^{-1} \in G'$ et $y^{-1} \in H'$ et, d'après l' ypot èse, $\alpha(y^{-1})(x^{-1}) \in G'$. D'où $(x,y)^{-1} \in G' \times H'$. Finalement, soient (x,y) et (x',y') dans $G' \times H'$. On a $(x,y)(x',y') = (x \cdot \alpha(y)(x'), yy')$. D'après l' ypot èse, $\alpha(y)(x') \in G'$. Comme G' et H' sont des sous-groupes, $x \cdot \alpha(y)(x') \in G'$ et $yy' \in H'$. D'où $(x,y)(x',y') \in G' \times H'$. Cela montre que $G' \times H'$ est un sous-groupe de $G \rtimes_\alpha H$ **(0,5 pt)**.

b. Pour $y \in H'$, soit $\alpha'(y)$ la restriction de $\alpha(y)$ à G'. D'après le a, l'image de $\alpha'(y)$ est contenue dans G', i.e., $\alpha'(y)$ est un endomorp isme de G'. Comme $\alpha'(yy') = \alpha'(y) \circ \alpha'(y')$ quels que soient $y, y' \in H'$, α' est un morp isme de H' dans $\mathrm{Aut}(G')$ **(0,5 pt)**. Pour deux éléments $(x,y), (x,y') \in G' \times H'$, on a $(x,y)(x',y') = (x \cdot \alpha(y)(x'), yy') = (x \cdot \alpha'(y)(x'), yy')$. Il s'ensuit que le sous-groupe $G' \times H'$ de $G \rtimes_\alpha H$ est égal au produit semi-direct $G' \rtimes_{\alpha'} H'$ **(0,5 pt)**.

c. Supposons que $G' \times H'$ est un sous-groupe distingué de $G \rtimes_\alpha H$. En particulier, $(e,h)(x,e)(e,h)^{-1} \in G' \times H'$ quels que soient $x \in G'$ et $h \in H$, i.e., $\alpha(h)(x) \in G'$ pour tout $x \in G'$ et $h \in H$. Cela montre (i). De même, $(e,h)(e,y)(e,h)^{-1} \in H'$ quels que soient $y \in H'$ et $h \in H$, i.e., $hyh^{-1} \in H'$ pour tout $y \in H'$ et $h \in H$. D'où (ii). Et également, $(g,e)(x,y)(g,e)^{-1} \in G' \times H'$ quels que soient $x \in G'$,

$y \in H'$ et $g \in G$, i.e., $g \cdot x \cdot \alpha(y)(g^{-1}) \in G'$ pour tout $x \in G'$, $y \in H'$ et $g \in G$. Cela montre (iii) **(1 pt)**.

Réciproquement, supposons que G' et H' vérifient les conditions (i), (ii) et (iii). Montrons que $G' \times H'$ est un sous-groupe distingué de $G \rtimes_\alpha H$. Tout d'abord, le (i) implique que $G' \times H'$ est bien un sous-groupe de $G \rtimes_\alpha H$, d'après le a **(0,5 pt)**. Soient $(x, y) \in G' \times H'$ et $(g, h) \in G \rtimes_\alpha H$. On a

$$(g, h)(x, y)(g, h)^{-1} = (g \cdot \alpha(h)(x) \cdot \alpha(hyh^{-1})(g^{-1}), hyh^{-1}).$$

D'après le (i), $\alpha(h)(x) \in G'$. D'après le (ii), $hyh^{-1} \in H'$. Donc, d'après le (iii), $g \cdot \alpha(h)(x) \cdot \alpha(hyh^{-1})(g^{-1}) \in G'$. On a déjà remarqué que $hyh^{-1} \in H'$. Par conséquent, $(g, h)(x, y)(g, h)^{-1} \in G' \times H'$, i.e., $G' \times H'$ est distingué dans $G \rtimes_\alpha H$ **(0,5 pt)**.

d. D'après le c, le sous-ensemble $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times A_4$ est un sous-groupe distingué de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\alpha S_4$ **(0,5 pt)**. D'après le b, ce sous-groupe est le produit semi-direct $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_{\alpha'} A_4$, où α' est la restriction de α à A_4. Comme cette restriction est triviale, le sous-groupe en question est le produit direct $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times A_4$ **(0,5 pt)**. Comme $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times A_4$ est d'indice 2 dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\alpha S_4$, le groupe quotient est simple. On a donc notre premier cran d'une suite de Jordan-Hölder pour $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\alpha S_4$:

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times A_4 \subsetneq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\alpha S_4.$$

Ensuite, d'après l'exercice III.54 du TD, une suite de Jordan-Hölder pour A_4 est

$$\{\mathrm{id}\} \subsetneq L \subsetneq K \subsetneq A_4 \quad \textbf{(0,5 pt)},$$

où K est le sous-groupe distingué

$$\{\mathrm{id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$$

de A_4 et L est le sous-groupe distingué $\{\mathrm{id}, (1,2)(3,4)\}$ de K. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\{(0, \mathrm{id})\} \subsetneq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \{\mathrm{id}\} \subsetneq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times L \subsetneq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times K \subsetneq \\ \subsetneq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times A_4 \subsetneq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\alpha S_4\end{aligned}$$

est une suite de Jordan-Hölder pour $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\alpha S_4$ **(0,5 pt)**.