Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ARITHMETIQUE ET APPLICATIONS, COMBINATOIRE ET GRAPHES

Contrôle continu, le 10 février 2014, 9h00–9h30

CORRIGE et BAREME

Exercice 1. a. **(2 pts)** On a

$$(1+X^1+X^2+\cdots+X^k+\cdots)\times(1+X^2+X^4+\cdots+X^{2\ell}+\cdots)\times (1+X^3+X^6+\cdots+X^{3m}+\cdots) = (X^{0\times 1}+X^{1\times 1}+X^{2\times 1}+\cdots+X^{k\times 1}+\cdots)\times (X^{0\times 2}+X^{1\times 2}+X^{2\times 2}+\cdots+X^{\ell\times 2}+\cdots)\times(X^{0\times 3}+X^{1\times 3}+X^{2\times 3}+\cdots+X^{m\times 3}+\cdots) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{k,\ell,m\in\mathbb{N}:\\ k\times 1+\ell\times 2+m\times 3=n}} 1\right)X^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = F.$$

b. **(1 pt)** D'après le a,

$$F = \frac{1}{1-X}\times\frac{1}{1-X^2}\times\frac{1}{1-X^3}.$$

la série F est donc bien une fraction rationnelle.

Bien que la décomposition en éléments simples de F soit donnée dans le sujet, profitons-en pour rappeler comment l'obtenir : Le dénominateur de F se décompose comme ceci dans $\mathbb{C}[X]$:

$$(1-X)(1-X^2)(1-X^3) = -(X-1)^3(X+1)(X-j)(X-j^2) = -(X-1)^3(X^3+2X^2+2X+1),$$

où j est la racine cubique de l'unité $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$. Comme 1 est une racine du dénominateur de F de multiplicité 3, faisons la substitution $Y = X-1$, pour obtenir

$$F = -\frac{1}{Y^3(Y^3+5Y^2+9Y+6)}.$$

On fait la division de 1 par Y^3+5Y^2+9Y+6 suivant les puissances croissantes de Y à l'ordre 3, et on obtient

$$1 = (\tfrac{17}{72}Y^2-\tfrac{1}{4}Y+\tfrac{1}{6})(Y^3+5Y^2+9Y+6)+Y^3(-\tfrac{17}{72}Y^2-\tfrac{67}{72}Y-\tfrac{25}{24}).$$

Du coup,

$$F = -\frac{\frac{17}{72}Y^2 - \frac{1}{4}Y + \frac{1}{6}}{Y^3} - \frac{-\frac{17}{72}Y^2 - \frac{67}{72}Y - \frac{25}{24}}{Y^3 + 5Y^2 + 9Y + 6} =$$

$$\frac{-\frac{17}{72}}{Y} + \frac{\frac{1}{4}}{Y^2} - \frac{\frac{1}{6}}{Y^3} + \frac{\frac{17}{72}Y^2 + \frac{67}{72}Y + \frac{25}{24}}{Y^3 + 5Y^2 + 9Y + 6} =$$

$$-\frac{\frac{17}{72}}{X-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(X-1)^2} - \frac{\frac{1}{6}}{(X-1)^3} + \frac{\frac{17}{72}X^2 + \frac{11}{24}X + \frac{25}{72}}{X^3 + 2X^2 + 2X + 1}.$$

Il nous reste à faire la décomposition en éléments simples du dernier terme. On a vu ci-dessus que le dénominateur de ce dernier se décompose dans $\mathbb{C}[X]$ comme $(X+1)(X-j)(X-j^2)$. On pourra donc écrire

$$\frac{\frac{17}{72}X^2 + \frac{11}{24}X + \frac{25}{72}}{(X+1)(X-j)(X-j^2)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-j} + \frac{c}{X-j^2},$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$ sont à déterminer. Multiplier de deux côtés par $X+1$, simplifier, et évaluer en -1 donne :

$$a = \frac{\frac{17}{72}(-1)^2 + \frac{11}{24}(-1) + \frac{25}{72}}{(-1)^2 + (-1) + 1} = \frac{1}{8}.$$

De même, on obtient

$$b = \frac{\frac{17}{72}j^2 + \frac{11}{24}j + \frac{25}{72}}{(j+1)(j-j^2)} = -\frac{1}{9}j.$$

Du coup,

$$c = \overline{b} = -\frac{1}{9}\overline{j} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}j.$$

Au final, la décomposition en éléments simples de F est bien

$$F = -\frac{\frac{17}{72}}{X-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(X-1)^2} - \frac{\frac{1}{6}}{(X-1)^3} + \frac{\frac{1}{8}}{X+1} - \frac{\frac{1}{9}j}{X-j} + \frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}j}{X-j^2}.$$

c. **(4 pts)** On a

$$-\frac{\frac{17}{72}}{X-1} = \frac{17}{72}\frac{1}{1-X} = \frac{17}{72}\sum_{n=0}^{\infty} X^n.$$

Par la formule du binôme, on a

$$\frac{\frac{1}{4}}{(X-1)^2} = \frac{1}{4}(1-X)^{-2} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-1)^n X^n.$$

De même,

$$-\frac{\frac{1}{6}}{(X-1)^3} = \tfrac{1}{6}(1-X)^{-3} = \tfrac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}(-1)^n X^n.$$

On a

$$\frac{\frac{1}{8}}{X+1} = \tfrac{1}{8}\frac{1}{1-(-X)} = \tfrac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-X)^n = \tfrac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n X^n.$$

Puis,

$$-\frac{\frac{1}{9}j}{X-j} = \tfrac{1}{9}\frac{j}{j-X} = \tfrac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{X}{j}} = \tfrac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{X}{j}\right)^n = \tfrac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{j^n}X^n.$$

Du coup,

$$\frac{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}j}{X-j^2} = \overline{\left(-\frac{\frac{1}{9}j}{X-j}\right)} = \tfrac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{j^{2n}}X^n.$$

d. **(1 pt)** Il suit du c que

$$a_n = \tfrac{17}{72} + \tfrac{1}{4}\binom{-2}{n}(-1)^n + \tfrac{1}{6}\binom{-3}{n}(-1)^n + \tfrac{1}{8}(-1)^n + \tfrac{1}{9}\frac{1}{j^n} + \tfrac{1}{9}\frac{1}{j^{2n}}.$$

e. **(2 pts)** Rappelons que

$$\binom{-m}{n} = \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-n+1)}{n!} =$$
$$(-1)^n\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!} = (-1)^n\binom{m+n-1}{n}$$

pour $m, n \in \mathbb{N}$. D'après le d, on a donc

$$a_n = \tfrac{17}{72}+\tfrac{1}{4}(-1)^n\binom{n+1}{n}(-1)^n+\tfrac{1}{6}(-1)^n\binom{n+2}{n}(-1)^n+\tfrac{1}{8}(-1)^n+\tfrac{1}{9}\frac{1}{j^n}+\tfrac{1}{9}\frac{1}{j^{2n}} =$$
$$\tfrac{17}{72} + \tfrac{1}{4}(n+1) + \tfrac{1}{12}(n+2)(n+1) + \tfrac{1}{8}(-1)^n + \tfrac{1}{9}j^{2n} + \tfrac{1}{9}j^n =$$
$$\tfrac{17}{72} + \tfrac{1}{12}(n+5)(n+1) + \tfrac{1}{8}(-1)^n + \tfrac{1}{9}j^{2n} + \tfrac{1}{9}j^n,$$

car $\frac{1}{j} = j^2$ et $\frac{1}{j^2} = j$. Par conséquent, en utilisant que $j^3 = 1$ et $j^2 + j = -1$, on a

$$a_{40} = \tfrac{17}{72}+\tfrac{1}{12}\times 45\times 41+\tfrac{1}{8}(-1)^{40}+\tfrac{1}{9}j^{80}+\tfrac{1}{9}j^{40} = \tfrac{17}{72}+\tfrac{1}{12}\times 45\times 41+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}j^2+\tfrac{1}{9}j =$$
$$\tfrac{17+6\times 45\times 41+9-8}{72} = \tfrac{2+6\times 5\times 41}{8} = \tfrac{1+3\times 5\times 41}{4} = \tfrac{616}{4} = 154.$$