

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHÉMATIQUES

ANALYSE DANS \mathbb{R}^n

Examen terminal particulier, le 19 mai 2014, 9h00-12h00

CORRIGE et BAREME

Question de cours. a. (1 pt) Un sous-ensemble de \mathbb{R}^n est fermé si son complémentaire est ouvert.

b. (2 pts) On montre plutôt la contraposée : F n'est pas fermé si et seulement s'il existe une suite (x_k) dans F convergente dans \mathbb{R}^n avec $\lim x_k \notin F$.

En effet, supposons que F n'est pas fermé. Le complémentaire F^c n'est donc pas ouvert. Cela veut dire qu'il existe $x_\infty \in F^c$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un élément $x_\varepsilon \in B(x_\infty, \varepsilon) \setminus F^c$. Si on prend $\varepsilon = 1/k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, et si on note, pour simplifier, x_k au lieu de $x_{1/k}$, on a $x_k \in F$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $x_k \rightarrow x_\infty$ avec $x_\infty \notin F$. Cela montre donc l'existence d'une suite (x_k) dans F qui converge et dont la limite n'appartient pas à F .

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite (x_k) dans F qui converge et dont la limite n'appartient pas à F . Montrons que F n'est pas fermé. Soit x_∞ la limite de la suite x_k . Comme $x_\infty \notin F$, on a $x_\infty \in F^c$. Comme $x_k \rightarrow x_\infty$ et $x_k \notin F^c$, le sous-ensemble F^c n'est pas ouvert. Cela veut dire que F n'est pas fermé.

Exercice 1. a. (1,5 pt) Comme la fonction $t \mapsto t^2 + 1$ est dérivable et non nulle sur \mathbb{R} tout entier, la fonction $t \mapsto 1/(t^2 + 1)$ est dérivable sur \mathbb{R} tout entier, et il en est de même de la fonction $t \mapsto (t^2 + 1)^3$. Comme la fonction $t \mapsto t^4 + 2t^2$ est dérivable sur \mathbb{R} , on en déduit que l'argument de la racine carrée, la fonction $t \mapsto (t^4 + 2t^2)/(t^2 + 1)^3$ est dérivable sur \mathbb{R} tout entier. Comme $t^4 + 2t^2 = t^2(t^2 + 1)$, cette dernière fonction ne s'annule qu'en 0. Par conséquent, la fonction $t \mapsto \sqrt{(t^4 + 2t^2)/(t^2 + 1)^3}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Comme, de plus, les fonction $t \mapsto \cos(e^t)$ et $t \mapsto \sin(e^t)$ sont compositions de fonctions dérivables et donc dérivables sur \mathbb{R} tout entier, les fonctions produits f_1 et f_2 sont dérivables sur \mathbb{R}^* .

Montrons que f_1 et f_2 ne sont pas dérivables en 0. Remarquons que

$$f_1(t) = |t| \cdot \sqrt{\frac{t^2 + 2}{(t^2 + 1)^3}} \cdot \cos(e^t) \quad \text{et} \quad f_2(t) = |t| \cdot \sqrt{\frac{t^2 + 2}{(t^2 + 1)^3}} \cdot \sin(e^t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que les deuxièmes facteurs de ces deux expressions, disons g_1 et g_2 respectivement, sont des fonctions dérivables en 0 ayant dérivée non nulle en 0. Si f_1 et f_2 étaient dérivable en 0, il en était de même pour les fonctions quotient $t \mapsto f_1(t)/g_1(t)$ et $t \mapsto f_2(t)/g_2(t)$. Or, ces deux fonctions coïncident avec la fonction valeur absolue $t \mapsto |t|$ qui n'est pas dérivable en 0. Contradiction, c-à-d que f_1 et f_2 ne sont pas dérivables 0. On a donc $U_1 = U_2 = \mathbb{R}^*$.

La fonction f_3 est dérivable sur \mathbb{R} tout entier car la fonction $t \mapsto t^2 + 1$ est dérivable et non nulle sur \mathbb{R} tout entier. On a donc $U_3 = \mathbb{R}$.

b. **(0,5 pt)** La fonction f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si f_1 , f_2 et f_3 sont dérivables en a . Du coup, $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \mathbb{R}^*$ d'après le a.

c. **(1 pt)** La limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ existe si et seulement si les limites $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, existent. Or,

$$\frac{t^4 + 2t^2}{(t^2 + 1)^3} = \frac{t^4 + 2t^2}{t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1} = \frac{t^{-2} + 2t^{-4}}{(1 + 3t^{-2} + 3t^{-4} + t^{-6})} \rightarrow 0$$

lorsque t tend vers $+\infty$. Comme les fonctions $t \mapsto \cos(e^t)$ et $t \mapsto \sin(e^t)$ sont bornées, les fonctions produit f_1 et f_2 tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Il est clair qu'il en est de même pour f_3 . Par conséquent, la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ existe et elle vaut $(0, 0, 0)$. (voir le figure ci-dessous)

Exercice 2. a. **(0,5 pt)** Le complémentaire de U dans \mathbb{R}^3 est le plan yz . Si une suite convergente dans \mathbb{R}^3 est contenue dans ce plan, sa limite y appartient. En effet, soit (x_k) une suite convergente dans \mathbb{R}^3 contenue dans le plan le plan yz . Or, le plan yz est le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 d'équation $x = 0$. On a donc $x(x_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, Comme la fonction $(x, y, z) \mapsto x$ est continue sur \mathbb{R}^3 , on a aussi $x(\lim x_k) = \lim x(x_k) = 0$, i.e., $\lim x_k$ appartient au plan yz . Cela montre que le plan yz est fermé et son complémentaire U est donc ouvert dans \mathbb{R}^3 .

b. **(0,5 pt)** Observons que l'image de la droite $\{(\frac{1}{2}, 0)\} \times \mathbb{R}$ est le cercle dans le plan xz de centre $(1, 0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$. L'image de $\{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{R}^2$ est donc la surface de révolution autour de l'axe z obtenue à partir de ce cercle, i.e., un donut dans \mathbb{R}^3 . (voir le figure ci-dessous)

c. **(0,5 pt)** Non. On a clairement $f(1, 0, 0) = f(1, 2\pi, 0)$.

d. **(0,5 pt)** Comme l'image par f du sous-ensemble $\mathbb{R}^{+,*} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ est la réunion de tous les cercles de centre $(1, 0, 0)$ dans le plan xz , on voit que l'image par f de $\mathbb{R}^{+,*} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ est égale au plan xz privé du point $(1, 0, 0)$. Comme l'image par f est obtenue par révolution autour de l'axe z de ce plan privé d'un point, on a bien $\text{im}(f) = \mathbb{R}^3$.

e. **(0,5 pt)** Comme les fonctions coordonnées de f sont de classe \mathcal{C}^1 , f l'est aussi.

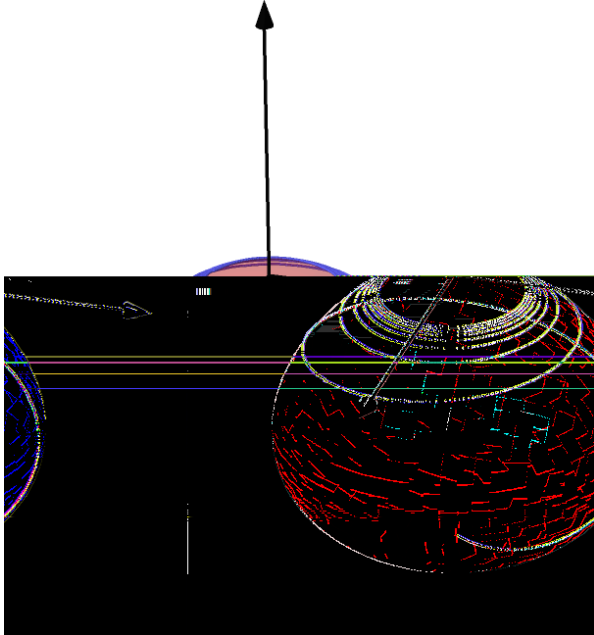


FIGURE 1 – La courbe image de l'exercice 1. Elle est contenue dans le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 défini par l'équation $x^2 + y^2 = z^3 - z$ dont une partie a été dessinée.

f. (0,5 pt) On calcule :

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f_1}{\partial r} = \cos \theta \cdot \cos \varphi & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = -(1 + r \cos \theta) \sin \varphi & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = -r \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} = \cos \theta \cdot \sin \varphi & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = (1 + r \cos \theta) \cos \varphi & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = -r \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ \frac{\partial f_3}{\partial r} = \sin \theta & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} = 0 & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} = r \cos \theta \end{array}$$

g. La matrice jacobienne est

$$J_a f = \begin{pmatrix} \cos \theta \cdot \cos \varphi & -(1 + r \cos \theta) \sin \varphi & -r \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ \cos \theta \cdot \sin \varphi & (1 + r \cos \theta) \cos \varphi & -r \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

h. (0,5 pt) Comme g est une fonction polynomiale sur \mathbb{R}^3 , elle est de classe \mathcal{C}^1 .

i. (0,5 pt) Une composition d'applications de classe \mathcal{C}^1 est de classe \mathcal{C}^1 .

j. (0,5 pt) Calculons $g \circ f$:

$$\begin{aligned} g(f(r, \varphi, \theta)) &= (1 + r \cos \theta)^2 \cos^2 \varphi + (1 + r \cos \theta)^2 \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta = \\ &= (1 + r \cos \theta)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \sin^2 \theta = (1 + r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta = \\ &= 1 + 2r \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = 1 + 2r \cos \theta + r^2. \end{aligned}$$

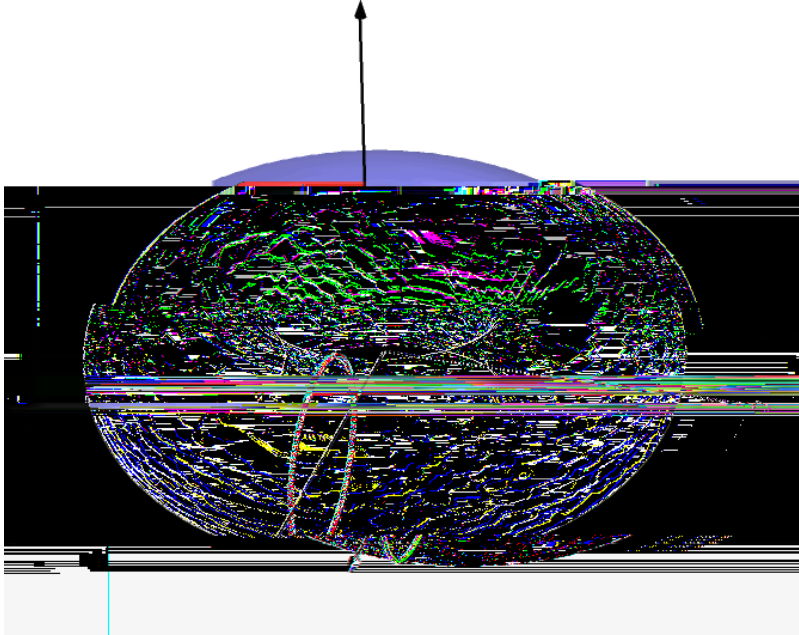


FIGURE 2 – L'image du sous-ensemble $\{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{R}^2$ par f de l'exercice 2, avec le cercle dans le plan xz de centre $(1, 0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

On voit que

$$J_{(r,\varphi,\theta)}(g \circ f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(g \circ f)}{r} & \frac{\partial(g \circ f)}{\varphi} & \frac{\partial(g \circ f)}{\theta} \end{pmatrix} = (2 \cos \theta + 2r \quad 0 \quad -2r \sin \theta).$$

Exercice 3. a. (1 pt) Il est clair que $\|(x, y, z)\|' \geq 0$, et que $\|(0, 0, 0)\|' = 0$. Supposons que $\|(x, y, z)\|' = 0$ et montrons que $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Comme $\|(x, y, z)\|' = 0$, on a $|x + y| + |x + y + z| + |y + z| = 0$. Du coup, $x + y = 0$, $x + y + z = 0$ et $y + z = 0$. On en déduit aisément que $z = 0$, puis $y = 0$ et ensuite $x = 0$.

Puis, montrons que $\|\lambda \cdot (x, y, z)\|' = |\lambda| \cdot \|(x, y, z)\|'$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. En effet,

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot (x, y, z)\|' &= \|(\lambda x, \lambda y, \lambda z)\|' = \\ &= |\lambda x + \lambda y| + |\lambda x + \lambda y + \lambda z| + |\lambda y + \lambda z| = \\ &= |\lambda| \cdot |x + y| + |\lambda| \cdot |x + y + z| + |\lambda| \cdot |y + z| = |\lambda| \cdot \|(x, y, z)\|'. \end{aligned}$$

Il nous reste à montrer l'inégalité triangulaire pour la fonction $\|\cdot\|'$. Soient donc $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$. D'après l'inégalité triangulaire pour la valeur

absolue sur les nombres réels, on a

$$\begin{aligned} \|(x, y, z) + (x', y', z')\|' &= \|(x + x', y + y', z + z')\|' = \\ &= |x + x' + y + y'| + |x + x' + y + y' + z + z'| + |y + y' + z + z'| \leq \\ &= |x + y| + |x' + y'| + |x + y + z| + |x' + y' + z'| + |y + z| + |y' + z'| = \\ &= \|(x, y, z)\|' + \|(x', y', z')\|'. \end{aligned}$$

L'application $\|\cdot\|'$ est donc une norme sur \mathbb{R}^3 .

b. **(1 pt)** D'après le cours, deux normes sur un espace vectoriel réel de dimension finie sont équivalentes. D'où l'existence des nombres réels m et M ayant les propriétés requises.

c. **(2 pts)** On a

$$\begin{aligned} \|(x, y, z)\|' &= |x+y| + |x+y+z| + |y+z| \leq |x| + |y| + |x| + |y| + |z| + |y| + |z| = \\ &= 2|x| + 3|y| + 2|z| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \\ &= 7\|(x, y, z)\|. \end{aligned}$$

Du coup, $M = 7$ convient.

De l'autre côté, on a

$$\begin{aligned} |x| &= |(x + y + z) - (y + z)| \leq |x + y + z| + |y + z| \leq \|(x, y, z)\|' \\ |y| &= |(x + y) - (x + y + z) + (y + z)| \leq \\ &= |x + y| + |x + y + z| + |y + z| = \|(x, y, z)\|' \\ |z| &= |-(x + y) + (x + y + z)| \leq |x + y| + |x + y + z| \leq \|(x, y, z)\|'. \end{aligned}$$

D'où

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq |x| + |y| + |z| \leq 3\|(x, y, z)\|',$$

ou encore

$$\frac{1}{3}\|(x, y, z)\| \leq \|(x, y, z)\|'.$$

Par conséquent $m = \frac{1}{3}$ convient.

Exercice 4. a. **(0,5 pt)** On a $f_x(t) = (\ln t)^x = \exp(x \cdot \ln(\ln t))$ pour tout $t \in I$. Du coup, f_x est continue sur I pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, f_x est HK-intégrable.

b. **(0,5 pt)** On a

$$F(0) = \int_e^{e^2} f(0, t) dt = \int_e^{e^2} dt = e^2 - e.$$

Pour $F(1)$, on fait de l'intégration par parties :

$$F(1) = \int_e^{e^2} f(1, t) dt = \int_e^{e^2} 1 \cdot \ln t dt = [t \ln t]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} t \cdot \frac{1}{t} dt = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2.$$

Pour $F(2)$, on fait encore de l'intégration par parties et on utilise $F(1) = e^2$:

$$F(2) = \int_e^{e^2} f(2, t) dt = \int_e^{e^2} 1 \cdot \ln^2(t) dt = [t \ln^2 t]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} t \cdot 2 \ln t \cdot \frac{1}{t} dt = 4e^2 - e - 2F(1) = 2e^2 - e.$$

c. **(0,5 pt)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a, de même,

$$F(n) = \int_e^{e^2} f(n, t) dt = \int_e^{e^2} 1 \cdot \ln^n(t) dt = [t \ln^n t]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} t \cdot n \ln^{n-1} t \cdot \frac{1}{t} dt = 2^n e^2 - e - nF(n-1).$$

d. **(0,5 pt)** Pour $t \in I$ fixe, la fonction $x \mapsto \exp(x \ln(\ln t))$ est bien dérivable. Il s'ensuit que f est partiellement dérivable par rapport à x en tout point de $\mathbb{R} \times I$.

e. **(0,5 pt)** On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln(\ln t) \exp(x \ln(\ln t)).$$

f. **(0,5 pt)** La fonction $(x, t) \mapsto \ln(\ln t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times I$. Du coup, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times I$.

g. **(1 pt)** D'après le cours, si f est une fonction sur $\mathbb{R} \times I$, où I est un segment, qui est dérivable par rapport à x et dont la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue, alors la fonction F définie ci-dessus est de class \mathcal{C}^1 .

h. **(0,5 pt)** D'après le cours encore,

$$F'(x) = \int_e^{e^2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_e^{e^2} \ln(\ln t) (\ln t)^x dt.$$

i. **(0,5 pt)** Pour $t \in I = [e, e^2]$, on a $\ln t \in [1, 2]$ et $\ln(\ln t) \in [0, \ln 2]$. En particulier, $\ln(\ln t) \geq 0$ pour $t \in I$, et > 0 si $t \neq e$. Du coup,

$$\ln(\ln t) (\ln t)^x = \ln(\ln t) e^{x \ln(\ln t)} \geq 0$$

pour tout $t \in I$ et > 0 si $t \neq e$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Il suit du h que $F'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, i.e., F est strictement croissante.