Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Examen terminal, le 14 mai 2014, 13h30-16h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Donner la définition d'un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.

b. Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Montrer que K est compact si et seulement si pour toute suite (x_k) dans K il existe une sous-suite extraite (x_{k_ℓ}) de (x_k) qui converge dans $\mathbb{R}^n$ avec limite dans K.

Exercice 1. Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la fonction vectorielle définie par

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)),$$

où

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \cos(\operatorname{sh}(t)) \cdot \sin(\arctan(t) + \tfrac{\pi}{2}) \\ f_2(t) &= \sin(\operatorname{sh}(t)) \cdot \sin(\arctan(t) + \tfrac{\pi}{2}) \\ f_3(t) &= \cos(\arctan(t) + \tfrac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $||f(t)|| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

c. En déduire que $\langle f(t), f'(t) \rangle = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

d. La limite $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe-t-elle ? Si oui la déterminer. Sinon dire pourquoi elle n'existe pas.

Exercice 2. Soit U le sous-ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \colon U \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right).$$

a. Montrer que U est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

c. Déterminer les dérivées partielles de f en tout point de U.

d. Déterminer la matrice jacobienne $J_a f$ de f pour tout $a \in U$.

Exercice 3. Définissons une fonction réelle, notée $||\cdot||'$, sur $\mathbb{R}^3$ par

$$||(x,y,z)||' = |x+y| + |x-y| + |z|.$$

a. Montrer que $||\cdot||'$ est une norme sur $\mathbb{R}^3$.

b. Justifier l'existence des nombres réels $m, M > 0$ tels que

$$m||(x,y,z)|| \leq ||(x,y,z)||' \leq M||(x,y,z)||,$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, où $||\cdot||$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer explicitement des nombres réels strictement positifs m et M tels que les deux inégalités ci-dessus sont vérifiées.

Exercice 4. Soit $X = [0, +\infty[$ et $I = [0,1]$. Soit $f\colon X \times I \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = t \cdot \sqrt[4]{x^4 + t^4}$$

a. Montrer que pour tout $x \in X$, la fonction $f_x\colon I \to \mathbb{R}$ définie par $f_x(t) = f(x,t)$ est intégrable sur I au sens de Henstock-Kurzweil.

Dans la suite on définit $F\colon X \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)dt.$$

b. Que vaut $F(0)$?

c. Montrer que f est partiellement différentiable par rapport à x en tout point de $X \times I$.

d. Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$.

e. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $X \times I$.

f. En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X.

g. Déterminer $F'(x)$.

h. Que vaut $F'(0)$?

Barème indicatif sur 20 points :

Q de cours	3 pts
Exercice 1	3 pts
Exercice 2	4 pts
Exercice 3	4 pts
Exercice 4	6 pts