Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 2 D'INFORMATIQUE PARCOURS IL

REDUCTION DES APPLICATIONS LINEAIRES

Examen terminal, le 11 janvier 2008, 9h00-12h00
CORRIGE et BAREME

Question de cours. Pour toute natrice complexe auto-adjointe A —textbf(1 pt) il existe une matrice unitaire U telle que $U^{\star}AU$ est diagonale **(1 pt)**.

Exercice 1. a. Dans Maple on fait tout d'abord appel au package d'algèbre linéaire :

```
with(LinearAlgebra)
```

On pose

```
A := Matrix([[9, 24, -3, 6, -30], [0, 0, -3, -1, 2], [1,
3, -3, 0, -2], [1, 4, -2, 1, -4], [3, 8, -1, 2, -10]])
```

et on effectue la commande

```
Rank(A)
```

pour obtenir que le rang de A est égal à 3 ce qui implique que $\dim(V) = 3$ **(1 pt)**.

b.On pose

```
B := Matrix([[2, 1, 2, -8, -4], [-3, 2, -10, 19, 6], [-2,
0, -4, 10, 4]])
```

et on effectue la commande

```
Rank(B)
```

pour obtenir que le rang de B est égal à 2 ce qui implique que $\dim(W) = 5 - 2 = 3$ d'après le Théorème du rang **(1 pt)**.

c. On détermine une famille génératrice de W. On définit d'abord le vecteur nul :

```
vn := Vector([0, 0, 0]).
```

Puis, on effectue la commande

```
w :=LinearSolve(B, vn, free = 'x')
```

pour obtenir

$$\begin{bmatrix} -2\,x_3 + 5\,x_4 + 2\,x_5 \\ 2\,x_3 - 2\,x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

On obtient une famille génératrice de W, et même une base, en posant

```
u[1] = subs(x[3] = 1, x[4] = 0, x[5] = 0, w) ; u[2] = subs(x[3]
= 0, x[4] = 1, x[5] = 0, w) ; u[3] = subs(x[3] = 0, x[4]
= 0, x[5] = 1, w) ;
```

Ensuite on obtient une base de $V + W$ en effectuant la commande

```
SumBasis([[Column(A, 1 .. 5)], [u[1], u[2], u[3]]])
```

ce qui donne une base à 4 éléments. Il s'ensuit que $\dim(V + W) = 4$ **(2 pt)**.

d. D'après la relation de Grassmann on a

$$\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V + W) = 3 + 3 - 4 = 2 \quad \textbf{(1 pt)}.$$