Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 2 D'INFORMATIQUE PARCOURS IL

# REDUCTION DES APPLICATIONS LINEAIRES

Examen terminal, le 18 décembre 2006, 8h30–11h30
CORRIGE et BAREME

**Exercice 1.** Soient

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On a $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$, par définition de $V$. On cherche un sous-espace vectoriel $W$ de $\mathbb{R}^5$ tel que $V \oplus W = \mathbb{R}^5$.

Soit $M$ la matrice $5 \times 8$ dont les colonnes sont les vecteurs $v_1, v_2, v_3$, $e_1, \ldots, e_5$. Lorsqu'on effectue la méthode du pivot de Gauss sur $M$, on obtient la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Comme chacune des 3 premières colonnes de $M'$ contient un pivot, les 3 premières colonnes de $M$ sont linéairement indépendantes, c-à-d, la famille $v_1, v_2, v_3$ est une base de $V$. Comme les 4-ième et 6-ième colonnes de $M'$ contiennent les autres pivots, la famille $v_1, v_2, v_3, e_1, e_3$ est une base de $\mathbb{R}^5$. Soit $W$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par $e_1, e_3$. Comme $v_1, v_2, v_3$, $e_1, e_3$ est une base de $\mathbb{R}^5$, on a bien $\mathbb{R}^5 = V \oplus W$ **(1 pt)**.

**Exercice 2.** Soit $v_1, \ldots, v_6$ la famille donnée. Soit $M$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $v_1, \ldots, v_6$. On effectue la méthode du pivot de Gauss sur $M$, et on obtient la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Comme les pivots de $M'$ se trouvent dans les colonnes $1, 2, 3, 5$, les colonnes correspondantes de $M$ constituent une base de $\mathbb{R}^4$. La famille $v_1, v_2, v_3, v_5$ est donc une base extraite de la famille donnée **(1 pt)**.

**Exercice 3.** D'après le cours, une matrice réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si toutes les valeurs propres sont réelles, et pour toute valeur propre $\lambda$, on a $\dim(E_\lambda) = \text{mult}(\lambda)$ **(1 pt)**.

Soit $A$ la matrice définie par

$$A = \left( \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} \right.$$

Le polynôme caractéristique de $D$ est égal à $-(X-2)(X^2-X+1)$. Comme le discriminant de $X^2-X+1$ est strictement négatif, la matrice $D$ admet une valeur propre non réelle. Il s'ensuit que $D$ n'est pas diagonalisable **(0,5 pt)**.

**Exercice 4.** Soit $A$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 4 & c \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $A$ est égal à $-(X-3)(X-4)^2$. Les valeurs propres de $A$ sont donc $3, 4$. Comme on a $\dim(E_3) \geq 1$, $\text{mult}(3) = 1$ et $\dim(E_3) \leq \text{mult}(3)$, on a bien $\dim(E_3) = \text{mult}(3)$ **(1 pt)**. Comme $\text{mult}(4) = 2$, la matrice $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\dim(E_4) = 2$ **(1 pt)**. D'après le Théorème du rang, $\dim(E_4) = 3 - \text{rang}(A - 4I)$ **(1 pt)**. La matrice $A$ est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\text{rang}(A-4I) = 1$. Or, la matrice

$$A - 4I = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 1 si et seulement si $c = 0$ **(1 pt)**. Il s'ensuit que $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $c = 0$.

**Exercice 5.** a. Le polynôme caractéristique de $A$ sur $\mathbb{R}$ est

$$X^4 + 15X^3 + 54X^2 - 108X - 648 = (X-3)(X+6)^3.$$

Comme le polynôme caractéristique de $A$ est scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice $A$ est diagonalisable **(1 pt)**.

b. Un vecteur propre de $A$ pour la valeur propre 3 est le vecteur

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur propre de $A$ pour la valeur propre $-6$ est

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On complète la famille $v_1; v_2$ en une base de $\mathbb{R}^4$. Pour cela, on effectue la méthode du pivot de Gauss sur la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

On obtient la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} :$$

Il s'ensuit que la famille $v_1; v_2; e_1; e_3$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Soit $P_1$ la matrice $4 \times 4$ dont les colonnes sont les vecteurs $v_1; v_2; e_1; e_3$. La matrice $P_1$ est inversible car ses colonnes constituent une base. On a

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \quad (2\ \text{pt}) :$$

Il reste à trigonaliser la matrice $2 \times 2$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} :$$

dont on sait que son polynôme caractéristique est égal à $(X+6)^2$. Un vecteur propre de $B$ pour la valeur propre $6$ est le vecteur

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} :$$

On peut compléter $w_1$ en une base de $\mathbb{R}^2$ en rajoutant $e_1$. Soit $Q_2$ la matrice $2 \times 2$ dont le colonnes sont

polynô+6)

On a

$$P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & -6 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \textbf{(2 pt)}.$$

Donc la matrice $P = P_1P_2$ convient.

**Exercice 6.** a. Les valeurs propres de $A$ sont $4, -8$. Soient

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a $E_4 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $E_{-8} = \mathrm{Vect}(v_3, v_4, v_5, v_6)$ **(1 pt)**. On doit vérifier que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ pour $i = 1, 2$ et $j = 3, 4, 5, 6$. Soient $V$ la matrice $6 \times 2$ de colonnes $v_1, v_2$ et $W$ la matrice $6 \times 4$ de colonnes $v_3, v_4, v_5, v_6$. On a ${}^tVW = 0$. Ce qui montre que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ pour $i = 1, 2$ et $j = 3, 4, 5, 6$. Les espaces propres $E_4$ et $E_{-8}$ sont donc bien orthogonaux **(1 pt)**.

b. On effectue Gram-Schmidt sur les familles $v_1, v_2$ et $v_3, v_4, v_5, v_6$, respectivement. On obtient

$$v_1' = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-4}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

et

$$v_3' = v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_4' = v_4 - \frac{\langle v_4, v_3' \rangle}{\langle v_3', v_3' \rangle} v_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_5' = v_5 - \frac{\langle v_5, v_3' \rangle}{\langle v_3', v_3' \rangle} v_3' - \frac{\langle v_5, v_4' \rangle}{\langle v_4', v_4' \rangle} v_4' = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_6' = v_6 - \frac{\langle v_6, v_3' \rangle}{\langle v_3', v_3' \rangle} v_3' - \frac{\langle v_6, v_4' \rangle}{\langle v_4', v_4' \rangle} v_4' - \frac{\langle v_6, v_5' \rangle}{\langle v_4', v_4' \rangle} v_5' = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'après le a, la famille $v_1', \ldots, v_6'$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^6$ **(1 pt)**.

Ensuite on normalise :

$$v_1'' = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\\-2\\-1\end{pmatrix},\ v_2'' = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ v_3'' = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$v_4'' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\ v_5'' = \frac{\sqrt{6}}{3}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\1\\0\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},\ v_6'' = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\\-\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Soit $P$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $v_1'', \ldots, v_6''$. Comme la base $v_1'', \ldots, v_6''$ est orthonormée, $P$ est une matrice orthogonale. De plus, comme $v_1'', v_2''$ est une base de $E_4$ et $v_3'', \ldots, v_6''$ est une base de $E_{-8}$, on a

$$^tPAP = \begin{pmatrix}4&0&0&0&0&0\\0&4&0&0&0&0\\0&0&-8&0&0&0\\0&0&0&-8&0&0\\0&0&0&0&-8&0\\0&0&0&0&0&-8\end{pmatrix}.$$