

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 1ERE ANNEE PARCOURS A IMP
ALGEBRE ET ANALYSE

Examen terminal, le 10 janvier 2008, 8h30–11h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Énoncer le Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 1. Soit $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ des applications ensemblistes.

- a. Montrer que $g \circ f$ n'est pas injective lorsque f est surjective et g n'est pas injective.
- b. Donner un exemple où $g \circ f$ est injective et g n'est pas injective.

Exercice 2. a. Calculer $(3 + 4i)^3$.

- b. Déterminer une racine carrée de $117 - 44i$.

Exercice 3. Soient $a = 3185$, $b = 1925$ et $c = 1001$.

- a. Déterminer $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $ua + vb = \text{pgcd}(a, b)$.
- b. Déterminer $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $xa + yb + zc = \text{pgcd}(a, b, c)$.

Exercice 4. Quel est le nombre de diviseurs de l'entier relatif 2008 ?

Exercice 5. Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle définie par

$$F = \frac{2X^2 + 6}{X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1}$$

Décomposer F en éléments simples.

Exercice 6. Soit $(s_n)_{n \geq 2}$ la suite définie par

$$s_n = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(3)} + \frac{1}{\ln(4)} - \dots + \frac{(-1)^n}{\ln(n)}.$$

Montrer que la suite (s_n) converge.

Barème indicatif sur 20 points :

Q de cours	2 pt
Exercice 1	2 pt
Exercice 2	3 pt
Exercice 3	3 pt
Exercice 4	2 pt
Exercice 5	4 pt
Exercice 6	4 pt