Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 1 ENTREE A IMP

ALGEBRE ET ANALYSE

Partiel mi-semestre, le 21 octobre 2006
CORRIGE et BAREME

Question de cours. Par l'absurde **(1 pt)**. Supposons qu'il n'y avait qu'un nombre fini de nombres premiers $p_1, \ldots, p_n$. Soit $N = p_1 \cdots p_n + 1$ **(1 pt)**. Comme $N \neq \pm 1$, il existe un nombre premier p divisant N **(1 pt)**. Comme p est premier, $p = p_i$ pour un certain indice $i \in \{1, \ldots, n\}$. Comme p divise $p_1 \cdots p_n$ et p divise N, p divise la différence $N - p_1 \cdots p_n = 1$ **(1 pt)**. Contradiction.

Exercice 1. Pour $n = 0$, le premier membre est une somme de 0 termes et est donc égal à 0. Le second membre est égal à $0^3 = 0$ lordsque $n = 0$. L'assertion est donc bien vraie au rang 0 **(2 pt)**.

Supposons que l'assertion est vraie au rang n, pour un certain entier naturel n **(1 pt)**. On montre l'assertion au rang $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(3k^2-3k+1) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k+1)+3(n+1)^2-3(n+1)+1 = \quad \textbf{(1 pt)}$$
$$= n^3 + 3n^2 + 6n + 3 - 3n - 3 + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 =$$
$$= (n+1)^3 \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Par le principe de récurrence,

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1) = n^3$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}$ **(1 pt)**.

Exercice 2. a. Supposons que z est une racine carrée de $12+5i$. Ecrire $z = x+iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Comme z est une racine carrée de $12+5i$, on a $(x+iy)^2 = 12 + 5i$. D'où

$$(x^2 - y^2) + 2ixy = 12 + 5i.$$

Du coup $x^2 - y^2 = 12$ et $2xy = 5$ **(1 pt)**. Comme $x \neq 0$, on a $y = \frac{5}{2x}$. Après substitution, on obtient

$$x^2 - \left(\frac{5}{2x}\right)^2 = 12.$$

En multipliant par $4x^2$, il vient

$$4x^4 - 48x^2 - 25 = 0 \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Du coup,

$$\begin{aligned} x^2 = \frac{48 \pm \sqrt{48^2 + 4 \times 4 \times 25}}{8} &= \frac{48 \pm 4\sqrt{12^2 + 25}}{8} = \\ &= \frac{12 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{12 \pm 13}{2} = -\frac{1}{2}, \frac{25}{2} \quad \textbf{(1 pt)}. \end{aligned}$$

Comme $x^2 \geq 0$, on a $x^2 = \frac{25}{2}$ **(1 pt)**, i.e., $x = \pm\frac{5}{\sqrt{2}} = \pm\frac{5}{2}\sqrt{2}$. On ne cherche qu'une seule racine carrée, donc on peut prendre $x = -\frac{5}{2}\sqrt{2}$, par exemple. Du coup, $y = \frac{5}{2x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(1 pt)**. Une racine carrée de $12 + 5i$ est donc $-\frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$.

b. Déterminons le discriminant Δ de l'équation :

$$\begin{aligned} \Delta = (-3 + i)^2 - 4(8 + i) = 9 - 1 - 6i - 32 - 4i = -24 - 10i = & \quad \textbf{(1 pt)} \\ = -2(12 + 5i) & \quad \textbf{(1 pt)}. \end{aligned}$$

D'après le a, $-\frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$ est une racine carrée de $12 + 5i$. Comme $i\sqrt{2}$ est une racine carrée de -2 **(1 pt)**,

$$\delta = i\sqrt{2} \times (-\frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}) = 1 - 5i \quad \textbf{(1 pt)}$$

est une racine carrée de Δ. Par conséquent, les solutions de l'équation sont

$$\frac{3 - i + 1 - 5i}{2} = 2 - 3i \quad \text{et} \quad \frac{3 - i - 1 + 5i}{2} = 1 + 2i \quad \textbf{(1 pt)}.$$