Institut Mathématique, Université de Rennes 1
DEA de Mathématiques

ESPACES DE TEICHMÜLLER

Examen Terminal, le 23 mars 1999, 14h–17h

CORRIGE

1. a. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des ouverts U de $\mathbb{C}$ tels que la restriction $p_{|U}$ de p à U soit injective. Soit $U \in \mathcal{U}$. La restriction $p_{|U}$ est un isomorphisme de U sur l'ouvert $p(U)$ de X. L'application réciproque $\varphi_U \colon p(U) \to U$ est une carte de l'atlas $(\varphi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ de X.
Montrons l'unicité de μ. Supposons que μ et μ' soient des différentielles de Beltrami sur X telles que $p^\star\mu = p^\star\mu'$. Alors, pour tout $U \in \mathcal{U}$,

$$\mu_{|p(U)} = \varphi_U^\star({}^\star\mu) = \varphi_U^\star(p^\star\mu') = \mu'_{|p(U)}$$

car $p \circ \varphi_U = \mathrm{id}_{p(U)}$. Comme la famille $\{p(U) \,|\, U \in \mathcal{U}\}$ recouvre X, $\mu = \mu'$.
Montrons l'existence d'une différentielle de Beltrami μ sur X telle que $p^\star\mu = \frac{1+i}{2}\frac{d\overline{z}}{dz}$. Définissons, pour $U \in \mathcal{U}$, une différentielle de Beltrami μ_U sur $p(U)$ par

$$\mu_U = \varphi_U^\star\left(\frac{1+i}{2}\frac{d\overline{z}}{dz}\right).$$

Il faut vérifier que les restrictions à $p(U)\cap p(V)$ de μ_U et μ_V coïncident quels que soient $U, V \in \mathcal{U}$.
Soient $U, V \in \mathcal{U}$. Soit $W = p(U) \cap p(V)$ et soit $\psi \colon \varphi_U(W) \to \varphi_V(W)$ tel que $\psi \circ \varphi_{U|W} = \varphi_{V|W}$. L'application ψ est biholomorphe du sous-ensemble ouvert $\varphi_U(W)$ de $\mathbb{C}$ sur le sous-ensemble ouvert $\varphi_V(W)$ de $\mathbb{C}$. Comme $p \circ \psi = \psi$, il existe $t \colon \varphi_U(W) \to \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ telle que $\psi(z) = z + t(z)$ pour tout $z \in \varphi_U(W)$. L'application t est alors continue et donc localement constante. Par conséquent, $\psi^\star(dz) = dz$, $\psi^\star(d\overline{z}) = d\overline{z}$ et donc

$$\begin{aligned}\mu_{V|W} = \varphi_{V|W}^\star\left(\frac{1+i}{2}\frac{d\overline{z}}{dz}\right) &= \varphi_{U|W}^\star\left(\psi^\star\left(\frac{1+i}{2}\frac{d\overline{z}}{dz}\right)\right) = \\ &= \varphi_{U|W}^\star\left(\frac{1+i}{2}\frac{d\overline{z}}{dz}\right) = \mu_{U|W}.\end{aligned}$$

b. Soit $L \colon \mathbb{C} \to C$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire définie par $L(z) = 2z + (1+i)\overline{z}$. Comme $|2|^2 > |1+i|^2$, L est un isomorphisme et préserve l'orientation.

Soit $\Lambda = L(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$. Alors, Λ est le réseau $\mathbb{Z}(3+i) + \mathbb{Z}(1+i)$ dans $\mathbb{C}$. Soit Y la surface de Riemann $\mathbb{C}/\Lambda$ et soit $q\colon \mathbb{C} \to Y$ le morphisme quotient. L'application L induit un difféomorphisme $f\colon X \to Y$ préservant l'orientation. Soit μ_f la dilatation de f. On montre que $\mu_f = \mu$.
Soit $U \in \mathcal{U}$. La restriction de q à $L(U)$ est une application biholomorphe sur $q(L(U))$. Soit $\psi_U\colon q(L(U)) \to L(U)$ son application réciproque. Le système $(\psi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ est alors un atlas pour Y. Comme $\psi_U \circ f_{|p(U)} = L \circ \varphi_U$,

$$(\mu_f)_{|p(U)} = \varphi_U^\star(\mu_L) = \varphi_U^\star\left(\frac{1+i}{2}\frac{d\bar{z}}{dz}\right) = \mu_U = \mu_{|p(U)}$$

quel que soit $U \in \mathcal{U}$. Par conséquent $\mu_f = \mu$.
Il s'ensuit que X_μ et Y sont biholomorphes. Donc

$$X_\mu \cong \mathbb{C}/\Lambda = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}(3+i) + \mathbb{Z}(1+i)) \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau),$$

où $\tau = (1+i)/(3+i) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$.

2. a. Soit $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$. Par définition (X,α) et (X,id) représentent le même élément de $M(X)$. Donc, a fortiori, $(X,\mathrm{id})\cdot\alpha = (X,\alpha) = (X,\mathrm{id})$ dans $T(X)$. Par conséquent, $f(\alpha)$ appartient au groupe d'isotropie de (X,id).
Réciproquement, Soit $\beta \in \mathrm{Diff}^+(X)$ tel que $(X,\mathrm{id})\cdot\beta = (X,\mathrm{id})$ dans $T(X)$. Cela signifie qu'il existe $\gamma \in \mathrm{Diff}^{+,0}(X)$ tel que $(X,\beta) = (X,\gamma)$ dans $M(X)$. Donc $\alpha = \gamma\circ\beta^{-1}$ est un automorphisme de X. Il s'ensuit que $f(\alpha) = \beta^{-1}$ dans $\mathrm{Mod}(X)$ et donc que $f(\alpha^{-1}) = \beta$, i.e., $\beta \in \mathrm{im}(f)$.

b. Rappelons que $R_g = T(X)/\mathrm{Mod}(X)$. D'après le a, le groupe d'isotropie de (X,id) est trivial. Comme $\mathrm{Mod}(X)$ agit proprement discontinument sur $T(X)$, il existe un voisinage ouvert U de (X,id) dans $T(X)$ tel que $U \cap (U\cdot\alpha) = \emptyset$ pour tout $\alpha \in \mathrm{Mod}(X)$ avec $\alpha \neq 1$. La restriction à U du morphisme quotient de $T(X)$ dans R_g est alors biholomorphe sur son image. Comme $T(X)$ est non singulier, R_g est non singulier en $[X]$.

c. Comme $\mathrm{Mod}(X)$ agit proprement discontinument sur $T(X)$, le groupe d'isotropie de (X,id) est fini. D'après le a, $\mathrm{im}(f)$ est fini. Comme f est injectif, $\mathrm{Aut}(X)$ est fini.

3. a. Supposons que $G' = hGh^{-1}$ soit de Schottky. Soit Ω le domaine de discontinuité de G. Le domaine discontinuité de G' est alors $\Omega' = h(\Omega)$. Soient $X = \Omega/G$ et $X' = \Omega'/G'$ et soient $p\colon \Omega \to X$ et $p'\colon \Omega' \to X'$ les morphismes quotient. Le homéomorphisme quasi-conforme h induit alors un homéomorphisme quasi-conforme $f\colon X \to X'$, i.e., f satisfait $p'\circ h_{|\Omega} = f\circ p$. Comme p et p' sont localement des isomorphismes, $p^\star(\mu_f) = \mu$. Pour $\alpha \in G$ on a donc

$$\alpha^\star(\mu) = \alpha^\star(p^\star(\mu_f)) = (p\circ\alpha)^\star(\mu_f) = p^\star(\mu_f) = \mu.$$

Réciproquement, supposons que $\alpha^\star\mu = \mu$ quel que soit $\alpha \in G$. Montrons que hGh^{-1} est de Schottky. En fait, il suffit de montrer que hGh^{-1} est contenu dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.
Comme $\alpha^\star\mu = \mu$ quel que soit $\alpha \in G$, il existe une différentielle de Beltrami ν sur $X = \Omega/G$ telle que $p^\star\nu = \mu$, où $p\colon \Omega \to X$ est le morphisme quotient. Soit X_ν la déformation quasi-conforme de X par ν. L'application $p'\colon \Omega' \to X_\nu$ telle que $p' \circ h = p$ est alors holomorphe. Comme $hGh^{-1} = \mathrm{Aut}(p')$, les éléments de hGh^{-1} sont des automorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, i.e., $hGh^{-1} \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

b. Soit X' une surface de Riemann compacte de genre g. Soit $X = \Omega/G$ et soit $p\colon \Omega \to X$ le morphisme quotient. Soit $f\colon X \to X'$ un homéomorphisme quasi-conforme et soit μ sa dilatation. Alors, $p^\star\mu$ satisfait la condition du a. D'après le Théorème de Ahlfors-Bers, il existe un homéomorphisme quasi-conforme $h\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tel que sa dilatation soit égale à $p^\star\mu$. D'après le a, $G' = hGh^{-1}$ est alors un groupe de Schottky. Son domaine de discontinuité est $\Omega' = h(\Omega)$. Définissons $p'\colon \Omega' \to X'$ par $p' \circ h_{|\Omega} = f \circ p$. Alors, p' est holomorphe et est un morphisme quotient de Ω' par G'. En particulier, Ω'/G' est isomorphe à X'.

4. Comme $g \geq 2$, il existe une uniformisation $p\colon \mathbb{H} \to X_1$ de X_1 par le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$. Soit G' le groupe des automorphismes du revêtement p. Le groupe G' est fuchsien de la première espèce. Soit $\overline{\mathbb{H}}$ le demi-plan inférieur. Soit X le quotient $\overline{\mathbb{H}}/G'$ et soit $q\colon \overline{\mathbb{H}} \to X$ le morphisme quotient. La conjugaison complexe induit un homéomorphisme de X_1 sur X. Il s'ensuit que X est une surface de Riemann compacte de genre g. Soit $f\colon X \to X_2$ un homéomorphisme quasi-conforme et soit μ sa dilatation. Alors $\nu = q^\star\mu$ est une différentielle de Beltrami sur $\overline{\mathbb{H}}$ satisfaisant $\alpha^\star\nu = \nu$ quel que soit $\alpha \in G'$. Prolongeons ν à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par 0 sur $\mathbb{H}$. Notons cette différentielle de Beltrami par $\tilde{\nu}$. Alors, $\tilde{\nu}$ est une differentielle de Beltrami satisfaisant $\alpha^\star\tilde{\nu} = \tilde{\nu}$ quel que soit $\alpha \in G'$. D'après le Théorème de Ahlfors-Bers, il existe un homéomorphisme quasi-conforme h de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tel que sa dilatation soit égale à $\tilde{\nu}$. Le groupe $G = hG'h^{-1}$ est alors kleinien avec domaine de discontinuité $\Omega = h(\mathbb{H} \cup \overline{\mathbb{H}})$. Les deux composantes connexes $\Omega_1 = h(\mathbb{H})$ et $\Omega_2 = h(\overline{\mathbb{H}})$ de Ω sont stables pour l'action de G et $\Omega_1/G \cong X_1$ et $\Omega_2/G \cong X_2$.