Annexe D

Utilité ordinale, utilité cardinale

D.1 La mesure de l'utilité

Les fonctions d'utilité sont au cœur de la théorie économique et tout particulièrement de la théorie des choix des consommateurs. Or, sous l'impulsion de Pareto, de nombreux économistes ont défendue l'idée que – pour cette partie de la théorie économique – les fonctions d'utilité étaient superflues et que le seul concept pertinent était les préférences des individus. Ceci dit, Debreu a montré que sous certaines conditions portant sur les préférences, on pouvait représenter ces dernières par des fonctions à valeurs réelles, définies à une transformation croissante près. C'est ce qu'on appelle les fonctions d'utilité ordinales.
Supposons que les préférences d'un individu soient telles que $a \succsim b \succsim c$. On représente ces préférences par une fonction d'utilité $U(.)$ qui vérifie

$$U(a) = 20 \quad U(b) = 10 \quad U(c) = 5$$

De ces trois chiffres, on peut également tirer les renseignements suivants :

1. l'utilité de a, b et c vaut exactement 20, 10 et 5 ;
2. a est deux fois plus utile que b et quatre fois plus que c ;
3. on obtient 15 degrés d'utilité en plus en ayant a plutôt que c ; et 5 degrés en plus en ayant b plutôt que c ;
4. la différence d'utilité entre a et c est trois fois plus grande que la différence d'utilité entre b et c.

Supposons que nous prenions la racine carrée de la fonction U. On appelle V cette nouvelle fonction d'utilité

$$V = \sqrt{U}$$

Il vient évidemment,

$$V(a) = \sqrt{20} = 4,472135955 \quad V(b) = \sqrt{10} = 3,16227766017 \quad V(c) = \sqrt{5} = 2,2360679775$$

On constate que des 4 renseignements précédents, seul le fait que $a \succsim b \succsim c$ continue à être vérifié. En effet, les « valeurs d'utilité » ont changé et il est désormais faux que a soit deux fois plus utile que b. De plus, les variations d'utilité et les rapports de différences ont également changé.
Si on admet qu'une fonction d'utilité n'est définie qu'à une *fonction croissante près*, alors on reconnaît *ipso facto* que le seul renseignement qu'on veut préserver en passant d'une fonction d'utilité à une autre est *l'ordre*. Par exemple, toute transformation croissante de la fonction U donnera toujours $a \succsim b \succsim c$.
Abordons maintenant le problème de l'utilité cardinale.
Reprenons l'example précédent, où on avait

$$U(a) = 20 \quad U(b) = 10 \quad U(c) = 5$$

et examinons l'ensemble des transformations qui préservent les renseignements 1 à 4.
Le premier renseignement n'est préservé que par la transformation « identité ». En effet, si $V = Id \circ U$ alors, on a

$$V(a) = 20 \quad V(b) = 10 \quad V(c) = 5$$

Le deuxième renseignement nous dit que $\frac{U(a)}{U(b)} = 2$ et $\frac{U(a)}{U(c)} = 4$. On constate donc que les transformations *linéaires* de U ne modifient pas ce renseignement. Si $V = \alpha U$ on a

$$\frac{V(a)}{V(b)} = \frac{\alpha U(a)}{\alpha U(b)} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{V(a)}{V(c)} = \frac{\alpha U(a)}{\alpha U(c)} = 4.$$

Le troisième renseignement nous dit que $U(a) - U(c) = 15$ et $U(b) - U(c) = 5$. Il est évident qu'en ajoutant une constante à la fonction U on ne change pas ce renseignement. Si $V = U + \beta$ on aura bien

$$V(a) - V(c) = (U(a) + \beta) - (U(c) + \beta) = 15,$$
$$V(b) - V(c) = (U(b) + \beta) - (U(c) + \beta) = 5.$$

Le dernier renseignement nous dit que

$$\frac{U(a) - U(c)}{U(b) - U(c)} = 3.$$

Il est clair qu'une transformation affine (positive) de U ne le modifie pas. Si $V = \alpha U + \beta$ On aura bien

$$\frac{V(a) - V(c)}{V(b) - V(c)} = \frac{\alpha U(a) + \beta - (\alpha U(c) + \beta)}{\alpha U(b) + \beta - (\alpha U(c) + \beta)} = 3.$$

On appelle « affines » les transformations de type $V = \alpha U + \beta$. Et comme on peut le remarquer, toutes les transformations que nous avons évoquées sont « affines ». Outre le fait qu'elles conservent l'ordre, on remarque que :

- si $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ on obtient la transformation identité. Elle laisse invariante l'échelle sur laquelle on mesure la grandeur (ici, l'utilité) ;
- si $\alpha > 0$ et $\beta = 0$ on obtient une transformation linéaire croissante. Cette transformation dilate l'échelle de mesure en conservant le même « zéro » ;
- si $\alpha = 0$ et $\beta > 0$ on obtient un décalage de l'origine. On déplace le « zéro » de l'échelle de mesure sans changer la taille des « graduations » ;
- si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on obtient une transformation affine dans le sens le plus large du terme. Elle change le zéro de l'échelle de mesure tout en dilatant les espaces entre les graduations.

On voit que les transformations affines contiennent comme cas particuliers les simples décalages d'origine et les simples dilatations des espaces entre les graduations qui contiennent elles-mêmes comme cas particulier la transformation identité.
On parlera d'utilité cardinale lorsque la classe des transformations d'une fonction d'utilité est restreinte aux *transformations affines croissantes* (ou positives).
Cela veut donc dire que l'utilité est dite « mesurable » lorsque toutes les fonctions d'utilité représentant les préférences d'un consommateur préservent les rapports de différences d'utilité, c'est à dire lorsque les instruments de mesure ne diffèrent que par le degré de dilatation (proportionnel) des graduations et la place du « zéro ».

D.2 Les fonctions d'utilité von Neumann-Morgenstern et la mesure de l'utilité

L'approche que von Neumann et Morgenstern ont adopté en 1944 dans leur livre *Theory of Game and Economic Behaviour* apporte une solution au problème de la mesure de l'utilité.
Nous allons essayer de comprendre très simplement pourquoi l'approche de von Neumann-Morgenstern conduit à dire que l'utilité est mesurable.
Supposons qu'un individu soit confronté à différentes possibilités (tenues pour certaines). Partant de ces possibilités, on définit ce qu'on appelles des « loteries », c.-à-d. des distributions de probabilités sur les différentes possibilités. Selon von Neumann et Morgenstern, on peut établir des préférences sur les loteries. Ces préférences possèdent selon eux des propriétés tout à fait particulières.

Supposons qu'on appelle a et z la meilleure et la pire des possibilités aux yeux de l'individu i[1]. On choisit deux nombres $U_i(a)$ et $U_i(z)$ qui fixent la plus élevée et la plus faible des utilités.
On considère maintenant la possibilité b vérifiant $a \succ b \succ z$. Cela veut dire — dans le langage des loteries — que i préfère la loterie $L(a,z;1,0)$ à b et préfère b à la loterie $L(a,z;0,1)$. L'hypothèse fondamentale de von Neumann et Morgenstern est qu'il existe une probabilité $0 < p < 1$ telle que l'individu i est indifférent entre b et la loterie $L(a,z;p,1-p)$. L'indice d'utilité de b est alors

$$U_i(b) = p\,U_i(a) + (1-p)\,U_i(z).$$

Cette procédure peut être répétée pour chaque possibilité b, c, d,..., y et donne une *fonction d'utilité von Neumann-Morgenstern*.

La fonction que nous avons construite n'est bien sûr pas unique. Prenons par exemple deux nouveaux nombres $V_i(a)$ et $V_i(z)$ pour fixer la plus élevée et la plus faible des utilités. En reprenant la démarche précédente, on aboutit une fois encore à l'idée que l'utilité de la possibilité b est

$$V_i(b) = p\,V_i(a) + (1-p)\,V_i(z).$$

En répétant cette procédure pour chaque possibilité b, c, d,..., y on obtient une nouvelle *fonction d'utilité von Neumann-Morgenstern*.
Maintenant, intéressons-nous au rapport qui existe entre U_i et V_i. On a

$$\begin{aligned} U_i(b) &= p\,U_i(a) + (1-p)\,U_i(z), \\ V_i(b) &= p\,V_i(a) + (1-p)\,V_i(z). \end{aligned}$$

En soustrayant la seconde à la première, il vient :

$$\begin{aligned} U_i(b) &= p\,U_i(a) + (1-p)\,U_i(z), \\ U_i(b) - V_i(b) &= p\,(U_i(a) - V_i(a)) + (1-p)\,(U_i(z) - V_i(z)). \end{aligned}$$

De la première on tire l'expression de p

$$p = \frac{U_i(b) - U_i(z)}{U_i(a) - U_i(z)}.$$

On remplace dans la seconde ce qui donne

$$U_i(b) - V_i(b) = \frac{U_i(b) - U_i(z)}{U_i(a) - U_i(z)}\,(U_i(a) - V_i(a)) + (1 - \frac{U_i(b) - U_i(z)}{U_i(a) - U_i(z)})\,(U_i(z) - V_i(z))$$

En tenant compte du fait que $U_i(a)$, $U_i(z)$, $V_i(a)$ et $V_i(z)$ sont des données, on obtient facilement (après simplification) que

$$V_i(z) = \alpha U_i(z) + \beta.$$

La fonction von Neumann-Morgenstern V_i est une transformation affine de la fonction U_i. Il va sans dire qu'on obtiendrait le même résultat pour tous les indices d'utilités haut et bas qu'on veut bien se donner comme point de départ.

1. Éventuellement, les meilleures ou les pires.