Annexe C

Les relations binaires

L'essentiel de la théorie des choix repose sur des relations binaires et sur leurs propriétés. Nous allons dans un premier temps faire des rappels sur cette notion mathématique essentielle.

C.1 Définition et propriétés

C.1.1 Définition

Au commencement était le *prédicat*. Un prédicat est un énoncé contenant des variables. Lorsqu'on remplace ces variables par des objets appartenant à un certain référentiel, on obtient une *assertion*. Donnons tout de suite un exemple : x est le neveu de y est de toute évidence un prédicat. Si x prend la valeur « Alphonse » et y la valeur « Barnabé », on obtient l'assertion : Alphonse est le neveu de Barnabé. Bien entendu, cette assertion peut être vraie ou fausse.
Un prédicat à deux variables est appelé *relation binaire*. Le prédicat « x est le neveu de y » est donc une relation binaire. On définira une relation binaire sur un ensemble de la façon suivante :

Définition 41. On appelle relation binaire sur un ensemble E toute relation binaire de E vers E, c'est à dire tout prédicat à deux variables astreintes à représenter des éléments de E. ▲

Une relation binaire sur un ensemble se note $x\mathscr{R}y$. Le symbole $\mathscr{R}$ n'est rien d'autre que l'énoncé caractérisant la relation (par exemple : « est le neveu de »).

C.1.2 Propriétés

Un certain nombre de propriétés que les relations binaires peuvent (ou non) vérifier sont généralement considérées comme importantes. Nous allons en donner une liste non exhaustive.

Définition 42. On dit qu'une relation binaire $\mathscr{R}$ sur un ensemble E est :

- réflexive si et seulement si : $\forall x \in E \qquad x\mathscr{R}x$
- complète si et seulement si :
  $\forall (x,y) \in E^2 \qquad (x \neq y) \Longrightarrow x\mathscr{R}y$ ou $y\mathscr{R}x$
- symétrique si et seulement si :
  $\forall (x,y) \in E^2 \qquad x\mathscr{R}y \Longrightarrow y\mathscr{R}x$
- asymétrique si et seulement si :
  $\forall (x,y) \in E^2 \qquad x\mathscr{R}y \Longrightarrow \neg(y\mathscr{R}x)$
- antisymétrique si et seulement si :
  $\forall (x,y) \in E^2 \qquad (x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x) \Longrightarrow x = y$
- transitive si et seulement si :
  $\forall (x,y,z) \in E^3 \qquad (x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z) \Longrightarrow x\mathscr{R}z$ ▲

Lorsqu'une relation binaire vérifie un certain nombre de ces propriétés, on parlera de relation d'ordre, de relation de préordre ou encore de relation d'équivalence. On ne s'intéressera ici qu'aux différentes variantes des relations qui évoquent « l'ordre ». Il convient toutefois de souligner tout de suite une difficulté. La terminologie est mal fixée si bien que des auteurs différents affublent de propriétés différentes des relations portant le même nom. Il est donc important de fixer le vocabulaire de façon précise. Dans cette annexe, nous retiendrons les définitions de Sen Sen (1979).

Définition 43. On dira qu'une relation binaire est une relation :
- de *quasi-ordre* si elle est réflexive et transitive,
- d'*ordre* si elle est réflexive, transitive et complète,
- d'*ordre partiel* si elle est réflexive, transitive et antisymétrique,
- de *chaîne* si elle est réflexive, transitive, complète et antisymétrique,
- d'*ordre partiel strict* si elle est transitive et asymétrique,
- d'*ordre fort* si elle est transitive, asymétrique et complète. ▲

C.2 Les relations de préférence

La théorie des choix est fondée sur la relation binaire dite de *préférence*. Quand on écrit $x\mathscr{R}y$ on signifie par là que x est *au moins aussi apprécié* que y. La négation de $x\mathscr{R}y$ s'écrit $\neg x\mathscr{R}y$ et signifie que x n'est pas au moins aussi apprécié que y. Imaginons maintenant que l'ensemble E contienne deux éléments x et y. On peut construire un tableau représentant toutes les relations possibles entre x et y :

TAB. C.1 – *Ensemble des possibilités.*

	$x\mathscr{R}y$	$\neg x\mathscr{R}y$
$y\mathscr{R}x$	$x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$	$\neg x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$
$\neg y\mathscr{R}x$	$x\mathscr{R}y$ et $\neg y\mathscr{R}x$	$\neg x\mathscr{R}y$ et $\neg y\mathscr{R}x$

On peut construire à partir de ce tableau deux nouvelles relations : la relation de *préférence stricte* et la relation *d'indifférence*.

Définition 44. $x\mathscr{P}y \iff x\mathscr{R}y \text{ et } \neg y\mathscr{R}x$ ▲

Définition 45. $x\mathscr{I}y \iff x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x$ ▲

Ces deux définitions permettent d'écrire à nouveau le tableau C.1. Il devient :

TAB. C.2 – *Préférences strictes et indifférence*

	$x\mathscr{R}y$	$\neg x\mathscr{R}y$
$y\mathscr{R}x$	$x\mathscr{I}y$	$y\mathscr{P}x$
$\neg y\mathscr{R}x$	$x\mathscr{P}y$	$\neg x\mathscr{R}y$ et $\neg y\mathscr{R}x$

La situation où x et y ne sont pas en relation ne porte pas de nom particulier. Il serait faux de penser qu'elle n'a pas de sens. Prenons par exemple le cas de la relation binaire *être le neveu de...* Il est fréquent que deux éléments d'un ensemble (les habitants d'une ville n'ayant aucun lien de parenté) ne soient pas réciproquement neveux ou nièces. On remarquera toutefois que si la relation binaire est complète, la possibilité d'une absence réciproque de relation est — par définition — exclue. On retiendra par ailleurs que, si la relation est complète :

Définition 46. $\neg\, x\mathscr{R}y \iff y\mathscr{P}x$ ▲

Définition 47. $\neg\, x\mathscr{P}y \iff y\mathscr{R}x$ ▲

Définition 48. $\neg\, x\mathscr{I}y \iff x\mathscr{P}y$ ou $y\mathscr{P}x$ ▲

C.2.1 Définition d'un meilleur élément

Nous pouvons maintenant définir ce qu'on appelle le meilleur élément d'un ensemble pour une relation binaire $\mathscr{R}$.

Définition 49 (Meilleur élément). Soit X un ensemble et $S \subset X$. Un élément x de S sera un meilleur élément de S pour la relation binaire $\mathscr{R}$ si et seulement si

$$\forall y \in S \quad x\mathscr{R}y.$$ ▲

Un meilleur élément S est donc au moins aussi bon que n'importe quel autre élément de S. Une autre façon de voir les choses (en prenant la négation de la définition) est de dire qu'aucun autre élément de S ne le surpasse strictement.

Définition 50. L'ensemble des meilleurs éléments de S pour la relation binaire $\mathscr{R}$ s'appelle son ensemble de choix. On le note $C(S,\mathscr{R})$. ▲

C.2.2 Définition d'un élément maximal

Définition 51 (Élément maximal). Un élément x de S est un élément maximal de S pour la relation binaire $\mathscr{R}$ si et seulement si

$$\neg\,(\exists y \in S,\ y\mathscr{P}x).$$

L'ensemble des éléments maximaux de S est appelé son ensemble maximal. On le note $M(S,\mathscr{R})$. ▲

On remarquera qu'un meilleur élément est un élément maximal[1], mais que l'inverse n'est pas vrai : $C(S,\mathscr{R}) \subset M(S,\mathscr{R})$.
Ces deux définitions permettent de caractériser l'équilibre d'un consommateur lorsqu'on n'utilise pas de fonctions d'utilités, c.-à-d. lorsqu'on en reste au stade *fondamental* des relations binaires de préférence (complètes). Soit en effet l'ensemble budgétaire d'un individu quelconque. Il correspond à l'ensemble S ci-dessus. Le panier d'équilibre vérifie évidemment :

1. aucun panier accessible ne lui est préférable strictement (sinon, il serait aussitôt acheté). Dire cela c'est affirmer que $\neg\,(\exists y \in S,\ y\mathscr{P}x)$, ce qui est la définition d'un élément maximal/meilleur
2. en développant la négation, on obtient $\forall y \in S,\ x\mathscr{R}y$, ce qui revient à dire que le panier d'équilibre est au moins aussi apprécié que tous les autres paniers accessibles (attention, rien ne prouve à ce stade que ce panier soit unique).

On en déduit que :
si un panier est strictement plus apprécié que la panier optimal alors il n'appartient pas à l'ensemble budgétaire

$$y \succ x \Longrightarrow y \notin S.$$

Vous ferez attention au fait que le vocabulaire varie d'un auteur à l'autre. Ainsi, on trouve chez Debreu (Debreu (1966), page 10) les définitions suivantes :

> « Soit S en ensemble *partiellement préordonné*. Quand $y \in S$ et qu'il n'existe pas de $x \in S$ tels que $x \succ y$ (resp. $x \prec y$), on dit que y est un élément *maximal* (resp. *minimal*) de S. Quand $y \in S$ et que pour tout $x \in S$ on a $x \precsim y$ (resp. $x \succsim y$) on dit que y est un *plus grand* (resp. *plus petit*) élément de S. Un plus grand (resp. plus petit) élément de S est évidemment un élément maximal (resp. minimal) de S. Quand le préordre est complet, la réciproque est aussi vraie et la distinction disparaît. Quand le préordre est un ordre, il y a au plus un plus grand élément et un plus petit élément. »

Il ajoute (page 69) qu'étant donnés les prix et la richesse d'un individu, une consommation d'équilibre pour cet individu est un plus grand élément pour son préordre de préférences dans son ensemble de consommation.

1. Un élément est meilleur si : $\forall y \in S\ x\mathscr{R}y$. En se reportant au tableau C.2, on voit qu'un élément maximal est tel que : $\forall y \in S\ x\mathscr{R}y$ ou $(\neg x\mathscr{R}y$ et $\neg y\mathscr{R}x)$. Ce dernier élément suffit à montrer que les deux définitions *ne sont pas identiques*. Mais si la relation est complète – ce qu'on admet pour les relations binaires de préférence – on a : $C(S,\mathscr{R}) = M(S,\mathscr{R})$