Annexe B

Les fonctions implicites en économie

On se donne une fonction de production de type $F(.) = 0$ sous la forme

$$F(x, y, L, T) = x^2 + y - |T|^{0,5} |L|^{0,5} = 0$$

avec :
$(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ (les outputs sont comptés positivement)
$(L, T) \in \mathbb{R}_-^2$ (les inputs sont comptés négativement)
Cette relation signifie qu'on produit deux outputs x et y à l'aide de travail (L) et de terre (T). Nous allons supposer sans le vérifier que le théorème des fonctions implicites s'applique et examiner les enseignements qu'on peut en tirer.

B.1 On exprime un output en fonction des autres variables

Par exemple y en fonction de (x, T, L). Cela signifie que

$$y = f_1(x, T, L).$$

Un calcul élémentaire permet d'expliciter la fonction f_1. En effet,

$$y = |T|^{0,5} |L|^{0,5} - x^2.$$

B.1.1 Étude de la relation entre x et y

Supposons qu'on fixe la quantité de terre et de travail. Cela signifie qu'on produit du x et/ou du y à l'aide d'un panier donné de terre et de travail (par exemple : $T = -100$ et $L = -100$). Il reste alors une relation entre x et y qui indique toutes les combinaisons possibles de x et de y qu'on peut obtenir avec cette quantité donnée de terre et de travail

$$y = -x^2 + 100^{0,5}100^{0,5} \Longrightarrow y = -x^2 + 100.$$

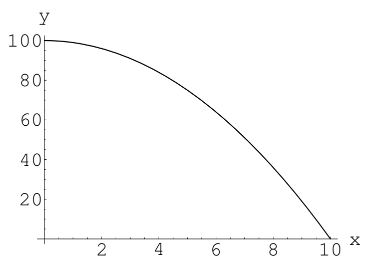

FIG. B.1 – *La frontière des possibilités de production*

Cette relation (voir le graphique B.1) montre que lorsqu'on dispose d'un panier donné d'inputs, il faut répartir ce panier entre la production de x et de y. Plus la production de x est importante (c.-à-d., plus x utilise d'inputs) et moins la production de y le sera (moins il restera d'inputs pour y). Bien entendu, il est possible de consacrer tous les inputs à produire du x ($x = 10$ et $y = 0$) ou à produire du y ($x = 0$ et$y = 100$). Mais toutes les combinaisons intermédiaires sont également possibles.

Cette courbe s'appelle la *courbe des possibilités de production* ou la *frontière des possibilités de production*.

La forme de la courbe montre que le choix de produire une unité de moins de x ($dx = -1$) ne se traduit pas par le gain automatique d'une unité de plus de y (généralement $dy \neq +1$). Cette remarque permet de comprendre pourquoi on définit un *taux de transformation des produits* (le TTP qui, par définition, est toujours positif ou nul). La valeur du TTP en un point de la courbe indique le taux auquel deux productions se substituent l'une à l'autre sachant que la quantité de tous les inputs est fixée. Si en un point le TTP est égal à 2 cela signifie qu'en renonçant à produire une unité de x on augmentera de deux unités la production de y, **la quantité d'inputs n'ayant pas changé** (on aura, bien entendu, prélevé des inputs de la production de x pour les utiliser à produire du y). Géométriquement, le TTP en un point de la frontière des possibilités de production est la valeur absolue de la pente de cette courbe en ce point. Il n'est pas difficile de comprendre pourquoi le TTP est variable. Supposons que le stock (donné) d'inputs soit abondamment utilisé à produire du x. Cela veut dire que la productivité marginale des facteurs utilisés à produire du x est faible alors qu'elle est encore forte pour les mêmes facteurs utilisés à produire le peu de y qu'on produit dans cette économie. En retirant un peu de L et de T de la production du bien x, on ne perdra presque pas d'output (dx est faible). Ces mêmes facteurs utilisés à produire du y seront très productifs, donc la production de y augmentera fortement (dy est important). On voit donc de cette façon que dx et dy dépendent de la productivité comparée des inputs dans les deux emplois, ce qui dépend de l'importance de la dotation relative des deux emplois en chacun des inputs.

Pour évaluer le TTP, on peut procéder de deux façons :

- calculer la dérivée de la fonction f_1, c'est à dire calculer la dérivée de la fonction représentative de la frontière des possibilités de production ;
- utiliser le théorème de dérivation des fonctions implicites.

ce qui donne :

$$f_1'(x) = (-x^2 + 100)' = -2x \Longrightarrow TTP = \left|f_1'(x)\right| = 2x \qquad \text{première méthode}$$

$$f_1'(x) = -\frac{\frac{\partial F(.)}{\partial x}}{\frac{\partial F(.)}{\partial y}} = -\frac{2x}{1} \Longrightarrow TTP = \left|-\frac{\frac{\partial F(.)}{\partial x}}{\frac{\partial F(.)}{\partial y}}\right| = 2x \qquad \text{deuxième méthode}$$

On vérifie qu'il s'agit bien du même résultat. La deuxième méthode est la seule recommandée. En effet, dans la plupart des cas, on ne saura pas expliciter la fonction f_1.

B.1.2 Étude de la relation entre y et L

Supposons maintenant qu'on fixe la quantité de x et de T. Cela signifie que l'on produit le bien y à l'aide de quantités variables de L sachant que les autres facteurs sont fixés (par exemple : $x = 6$ et $T = -100$). La fonction f_1 devient

$$y = 10\sqrt{|L|} + 100$$

Sa représentation graphique est donnée par la figure B.2.

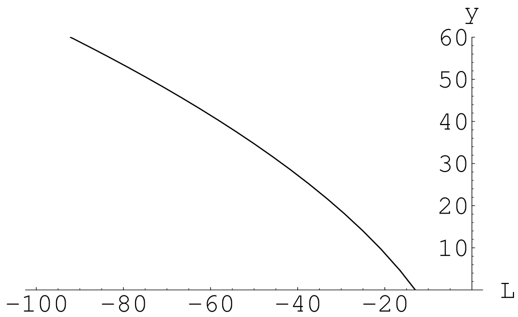

FIG. B.2 – *Productivité du travail en y*

Cette courbe montre qu'en employant des quantités croissantes (comptées négativement) de travail, on obtient une production croissante de y, les autres éléments étant fixés. Il s'agit de la courbe de productivité totale du facteur travail en termes de y. Comme on le sait, la valeur absolue de la pente de cette courbe indique la productivité marginale de L en y

$$Pm(L)_y = \left|\frac{dy}{dL}\right| \geq 0$$

Pour évaluer la productivité marginale $Pm(L)_y$, nous pouvons encore procéder de deux façons :

- calculer la valeur absolue de la dérivée de la fonction f_1 par rapport à L ;
- utiliser le théorème de dérivation des fonctions implicites.

ce qui donne

$$Pm(L)_y = \left|\frac{\partial f_1(.)}{\partial L}\right| = \frac{5}{|L|^{0,5}} \geq 0 \qquad \text{première méthode,}$$

$$\left|\frac{dy}{dL}\right| = \left|\frac{\frac{\partial F(.)}{\partial L}}{\frac{\partial F(.)}{\partial y}}\right| = \frac{5}{|L|^{0,5}} \geq 0 \qquad \text{deuxième méthode.}$$

B.2 On exprime un input en fonction des autres variables

Par exemple L en fonction de (x, y, T). L'application du théorème des fonctions implicites nous autorise à écrire $L = f_2(x, y, T)$. Dans le cas présent, on peut expliciter la fonction f_2

$$L = \frac{(x^2 + y)^2}{T}.$$

B.2.1 Étude de la relation entre L et T

On fixe la quantité d'outputs produits x et y (par exemple, $x = 1$ et $y = 1$). Il reste une relation entre L et t

$$L = \frac{4}{T} \qquad t \neq 0.$$

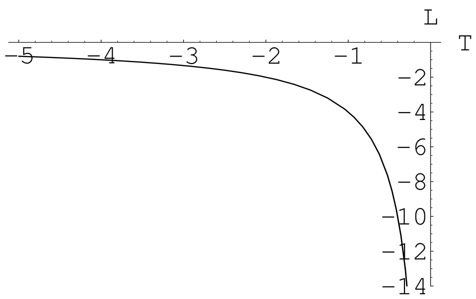

FIG. B.3 – *Courbes isoquantes*

Le graphique B.3 nous permet de reconnaître une *isoquante*, c'est à dire la courbe décrivant tous les couples (L, T) permettant de produire un *même panier* d'outputs. L'opposé ou la valeur absolue de la pente d'une isoquante en un point est appelé le *taux de substitution technique* (le TST). On a

$$TST_{T/L} = \left|\frac{dL}{dT}\right|.$$

Comme précédemment, on peut le calculer de deux façons

$$TST_{T/L} = \left|\frac{dL}{dT}\right| = \left|\frac{\partial f_2(.)}{\partial T}\right| = \frac{4}{T^2},$$
$$TST_{T/L} = \left|\frac{dL}{dT}\right| = \left|\frac{\frac{\partial F(.)}{\partial T}}{\frac{\partial F(.)}{\partial L}}\right| = \frac{4}{T^2}.$$

B.2.2 Étude de la relation entre L et y

On fixe la quantité de x et de T (par exemple, $x = 1$ et $T = 1$). Il reste une relation

$$L = -\frac{(y+1)^2}{1}.$$

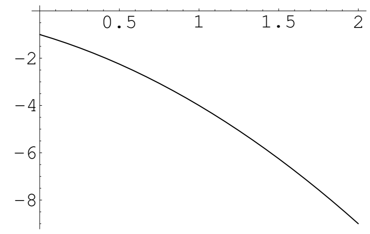

FIG. B.4 – *Le coût physique marginal*

On observant la courbe B.4, on constate que la production de quantités croissantes de bien y se traduit par l'emploi de quantités de plus en plus importantes du facteur L. Cette courbe montre ce que *coûte* en facteur L la production de quantités croissantes de y.
On l'appelle la courbe de coût en L de la production y (par exemple, ce que coûte en travail de révision l'obtention d'une note de 10, 11, 12 etc.). Il s'agit évidemment d'un coût « physique » (c.-à-d. : en nature, en matière, etc.). L'opposé ou la valeur absolue de la pente de cette courbe en un point est évidemment le « coût physique marginal » de la production en ce point. Il est une expression du supplément de coût en input qu'occasionne la production d'un supplément d'output. Par définition, on a

$$Cmp(y)_L = \left|\frac{dL}{dy}\right|.$$

Une fois encore, on peut calculer cette expression de deux façons

$$Cmp(y)_L = \left|\frac{dL}{dy}\right| = \left|\frac{\partial f_2(.)}{\partial y}\right| = 2y+2,$$
$$Cmp(y)_L = \left|\frac{dL}{dy}\right| = \left|\frac{\frac{\partial F(.)}{\partial y}}{\frac{\partial F(.)}{\partial L}}\right| = 2y+2.$$

On remarquera — en s'aidant des formulations issues du théorème de dérivation des fonctions implicites — que le coût physique marginal d'une production en terme d'un facteur est l'inverse de la productivité marginale de ce facteur en terme de cette production[1]

$$\left|Cmp(y)_L\right| = \left|\frac{1}{Pm(L)_y}\right|$$

1. Ceux qui ne seraient pas convaincus par cette formule peuvent se demander si le « coût en temps de révision d'un point de plus en microéconomie » n'est pas le revers de la « productivité en point d'une heure supplémentaire de révision ».