

## Annexe A

# Les fonctions implicites

Soit  $F$  une application de  $I \subset \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . On l'écrit  $z = F(x, y)$ .

Donnons immédiatement un exemple. L'application  $F(x, y) = y - 10 \sin(x)$  a pour représentation graphique :

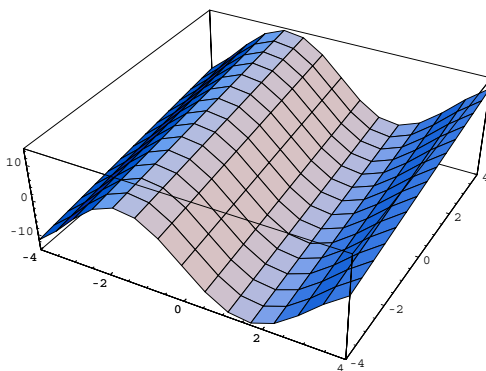


FIG. A.1 –  $F(x, y) = y - 10 \sin(x)$  ( $-4 \leq x \leq 4$  et  $-4 \leq y \leq 4$ )

Considérons maintenant l'équation  $F(x, y) = 0$ . Ce qui importe désormais est l'ensemble des couples  $(x, y)$  qui satisfont cette équation<sup>1</sup>. Appelons  $T$  l'ensemble de tous ces couples,

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}.$$

Remarquons immédiatement pour ceux qui aiment trouver LA solution d'une équation que :

- cet ensemble n'est pas forcément réduit à un seul élément ;
- il peut dans certains cas être vide.

Une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est une relation binaire particulière qui a chaque élément de l'ensemble de départ associe un unique élément de l'ensemble d'arrivée. Une fonction est donc un sous-ensemble  $G$  (le graphe de la fonction) très particulier de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Avec l'équation  $F(x, y) = 0$ , nous définissons également une relation binaire :  $xRy \Leftrightarrow F(x, y) = 0$ .  $T$  est le graphe de cette relation.

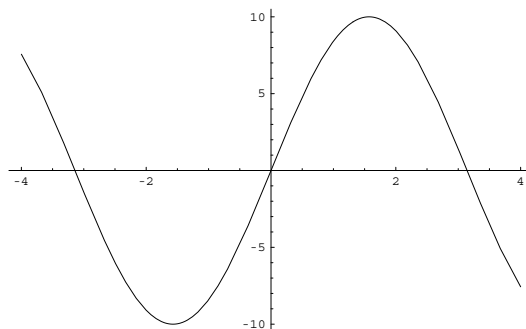
Si on reprend l'exemple précédent,  $T$  est défini de la façon suivante,

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 10 \sin(x) = 0\}.$$

On voit immédiatement que les couples  $(\pi, 0)$  ou  $(\frac{\pi}{2}, 10)$  appartiennent à  $T$ .

Allons un peu plus loin : peut-on décrire l'ensemble des couples  $(x, y)$  appartenant à  $T$  ? Oui, car il est évident que  $y - 10 \sin(x) = 0$  peut s'écrire  $y = 10 \sin(x)$ . On reconnaît là une fonction sinusoïdale, ce qui veut dire que toutes les solutions de l'équation  $y - 10 \sin(x) = 0$  dessinent dans le plan une courbe comme celle de la figure A.2.

1. Vous remarquerez que vous faites ce genre de gymnastique depuis la première année. Tracer des courbes d'indifférence revient bien à chercher tous les couples  $(x_1, x_2)$  vérifiant l'équation  $U = \mathcal{U}(x_1, x_2)$  pour une valeur donnée de  $U$ , c'est à dire, vérifiant  $U - \mathcal{U}(x_1, x_2) = 0$  pour une valeur donnée de  $U$ .

FIG. A.2 –  $y = 10\sin(x)$ ,  $(-4 \leq x \leq 4)$ 

On constate donc que les solutions de notre équation de départ  $F(x, y) = 0$  peuvent être décrites par une application  $y = f(x)$ .

Il n'y a pas si longtemps, on pouvait lire à chaque passage à niveaux « Attention, un train peut en cacher un autre ! ». J'espère que vous commencez à être convaincu que des *équations* peuvent *cache* des *fonctions*.

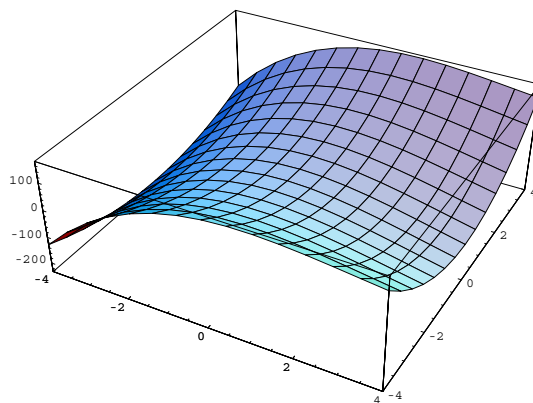
**Définition 40 (fonction implicite).** Soit  $z = F(x, y)$  une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $T$  le graphe de la relation binaire  $xRy \Leftrightarrow F(x, y) = 0$ . Si  $T$  peut être représenté sous la forme d'une application  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , alors on dit que l'équation  $F(x, y) = 0$  définit implicitement une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est appelée une fonction implicite. ▲

L'exemple que j'ai choisi n'est pas spécialement intéressant. Il est en effet beaucoup trop simple. Dans certains cas, l'équation  $F(x, y) = 0$  est tellement « compliquée » qu'on ne sait pas expliciter la fonction  $f$ .

Prenons l'exemple suivant (un peu plus compliqué). Soit la fonction

$$z = x(x^2 + y^2) - 10(x^2 - y^2)$$

Graphiquement cette fonction a l'allure suivante :

FIG. A.3 –  $z = x(x^2 + y^2) - 10(x^2 - y^2)$ 

Cherchons la fonction  $f$  qui se cache sous l'équation

$$x(x^2 + y^2) - 10(x^2 - y^2) = 0.$$

Remarquons tout d'abord que l'ensemble  $T$  des solutions de cette équation est décrite dans le graphique A.4 (les branches infinies ont été omises).

L'examen attentif de ce graphique montre que les solutions de l'équation  $x(x^2 + y^2) - 10(x^2 - y^2) = 0$  ne définissent pas d'applications<sup>2</sup> de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . En effet, à tout  $x$  on associe *deux*  $y$ . Inversement, à un  $y$  on associe parfois *deux*  $x$ . Il semble donc que l'équation  $F(x, y) = 0$  ne permette pas — dans le cas présent — de définir une fonction

2. Soit  $y = f(x)$  soit  $x = f(y)$ .

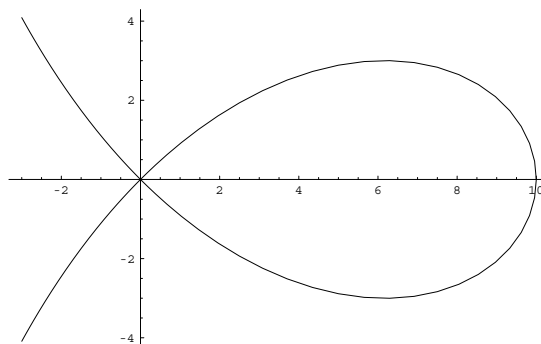


FIG. A.4 – Ensemble des solutions de  $x(x^2 + y^2) - 10(x^2 - y^2) = 0$

implicite  $f$ . En fait, c'est inexact. Supposons qu'on restreigne l'étude aux  $x$  et  $y$  positifs. Dans ce cas, il est clair qu'on obtient bien une fonction  $y = f(x)$ .

Cet exemple montre qu'il est généralement difficile de dire — sauf dans des cas triviaux — s'il existe une fonction implicite et sur quel domaine elle est définie.

C'est ici qu'entre en scène le théorème des fonctions implicites. Il permet d'affirmer que — sous certaines conditions — il existe une fonction implicite. Malheureusement, il s'agit d'un théorème d'existence<sup>3</sup> qui ne vaut que localement<sup>4</sup>.

**Théorème 7 (fonctions implicites).** Soit  $U$  un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $F(x, y)$  une fonction de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  définie, continue et dérivable relativement à  $y$  sur  $U$ . Si  $F'_y(x, y)$  est continue sur  $U$ . S'il existe un point  $(\bar{x}, \bar{y}) \in U$  tel que  $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  et  $F'_y(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ , alors il existe deux intervalles ouverts  $I_{\bar{x}}$  et  $I_{\bar{y}}$  avec  $\bar{x} \in I_{\bar{x}}$  et  $\bar{y} \in I_{\bar{y}}$ , tels que pour tout  $x \in I_{\bar{x}}$ , l'équation  $F(x, y) = 0$  ayant pour inconnue  $y$  admette une et une seule solution dans  $I_{\bar{y}}$ . Si on note cette solution  $f(x)$ , alors  $f(x)$  est l'unique application de  $I_{\bar{x}}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$\forall x \in I_{\bar{x}}, f(x) \in I_{\bar{y}} \text{ et } F(x, f(x)) = 0$$

De plus  $f(x)$  est continue. □

DÉMONSTRATION. Admis sans démonstration. ■

Voyons comment « fonctionne » ce théorème en l'appliquant à notre exemple favori.

La fonction  $F(x, y) = x(x^2 + y^2) - 10(x^2 - y^2)$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$ , continue sur  $\mathbb{R}^2$  et dérivable relativement à  $y$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Par ailleurs,  $F'_y(x, y) = 2xy + 20y$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ . Choisissons le point de coordonnées  $x = 1$  et  $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

Ce point vérifie l'équation  $F(x, y) = x(x^2 + y^2) - 10(x^2 - y^2) = 0$ . De plus,  $F'_y(1, \sqrt{\frac{2}{3}}) \neq 0$ .

Puisque toutes les conditions du théorème sont vérifiées, on peut affirmer qu'il existe un « pavé » (dont on ne sait pas la taille) autour du point  $x = 1$  et  $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$  dans lequel l'équation  $x(x^2 + y^2) - 10(x^2 - y^2) = 0$  définit de façon unique une fonction continue  $y = f(x)$  (qui passe évidemment par le point  $x = 1, y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ).

Le graphique A.5 montre que dans le « pavé<sup>5</sup> » situé autour du point  $A$  de coordonnées  $x = 1, y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , on a bien une fonction continue  $f$ . Vous vérifierez qu'au point  $B$ , on ne peut définir un tel « pavé » aussi petit soit-il<sup>6</sup>.

Le deuxième théorème important concerne la dérivation des fonctions implicites. Ce théorème permet de déterminer la dérivée de la fonction  $f$  même si on ne sait pas l'expliciter.

3. Cela veut dire qu'en appliquant ce théorème on sait qu'une fonction  $f$  existe. On ne sait pas quelle est cette fonction.

4. C'est à dire la fonction existe au voisinage d'un point. Ce voisinage est parfois très petit.

5. Il s'agit d'un pavé ouvert : le périmètre n'appartient pas au pavé.

6. Profitez-en pour vérifier qu'une des hypothèses du théorème n'est pas satisfaite quand on se place au point  $B$ . Profitez-en pour vérifier également qu'on peut définir au voisinage du point  $B$  une fonction  $x = f(y)$ .

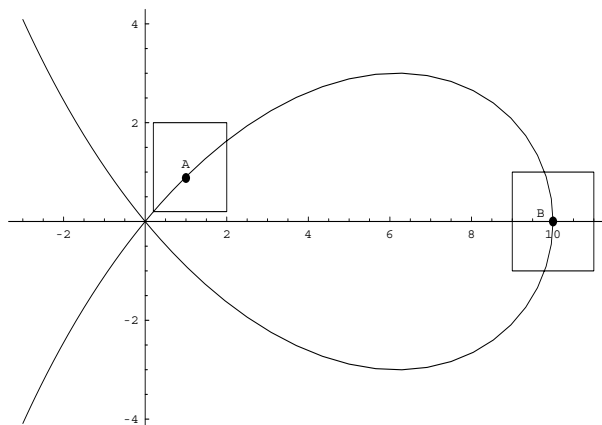


FIG. A.5 – Application du théorème des fonctions implicites

**Théorème 8 (dérivation des fonctions implicites).** Si le théorème précédent est vérifié et si  $F(x, y)$  est différentiable au point  $(\bar{x}, \bar{y})$ , alors

$$f'(\bar{x}) = \frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x(\bar{x}, \bar{y})}{F'_y(\bar{x}, \bar{y})} = - \frac{F'_x(\bar{x}, f(\bar{x}))}{F'_y(\bar{x}, f(\bar{x}))} \quad \square$$

DÉMONSTRATION. Admis sans démonstration. ■

Pourquoi ces deux théorèmes sont-ils aussi importants ? Tout simplement parce que certaines relations économiques ne peuvent pas s'exprimer sous forme fonctionnelle. Prenons le cas d'une fonction de production. Habituellement, on l'écrit  $q = f(N, K)$ . Cela veut dire qu'à chaque combinaison possible  $(N, K)$  de travail et de capital, on associe une certaine quantité produite  $q$ . Supposons maintenant que vous soyez confronté au problème suivant : un agriculteur produit des carottes ( $q_1$ ) et des navets ( $q_2$ ) à l'aide de travail et de capital. On vous demande alors : quelle est la relation fonctionnelle qui existe entre l'emploi des facteurs et les outputs ? De toute évidence, vous êtes coincé : vous avez envie d'écrire quelque chose du genre  $(q_1, q_2) = f(N, K)$ , mais vous savez que c'est une hérésie mathématique !

C'est ici qu'interviennent les fonctions implicites.

La relation technique entre les inputs et les outputs s'écrit

$$F(q_1, q_2, N, K) = 0$$

Cela veut dire que toutes les combinaisons techniques acceptables vérifient l'équation  $F(q_1, q_2, N, K) = 0$ . La fonction de production n'est rien d'autre que l'ensemble  $T$  des solutions de l'équation. Le théorème des fonctions implicites permet de dire que (sous certaines conditions) on peut (au moins localement) exprimer une variable en fonction des autres. Par exemple :

- carottes =  $f$ (navets, travail, capital)
- navets =  $f$ (carottes, travail, capital)
- travail =  $f$ (navets, carottes, capital)
- capital =  $f$ (navets, travail, carottes)

On retrouve alors nos bonnes vieilles relations fonctionnelles !

Mais à la réflexion, cela n'a pas grand intérêt. En effet, l'économie s'intéresse surtout aux *dérivées* de ces fonctions. Par exemple, ce n'est pas carottes =  $f$ (navets, travail, capital) qui importe mais  $\frac{d(\text{carottes})}{d(\text{travail})}$ , c'est à dire la productivité marginale du travail pour produire des carottes. C'est là que le théorème de dérivation des fonctions implicites entre en jeu. Si on connaît  $F(q_1, q_2, N, K) = 0$ , il est inutile d'expliciter les fonctions  $f$  pour connaître les seules choses réellement importantes : la productivité du travail ( $\frac{d(\text{output})}{d(\text{input})}$ ), le taux marginal de substitution entre inputs ( $-\frac{d(\text{input})}{d(\text{input})}$ ), le taux de transformation des produits ( $-\frac{d(\text{output})}{d(\text{output})}$ ).

**Exercices pour s'amuser :**

Soient les équations suivantes sous la forme  $F(x, y) = 0$  :

$$y - 3x + 2 = 0$$

$$3y + 6x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6 = 0$$

Calculer  $\frac{dy}{dx}$ . Vérifier vos calculs en explicitant la fonction  $y = f(x)$ .